Gedankenspiel

Würfel

Dominik Zobel

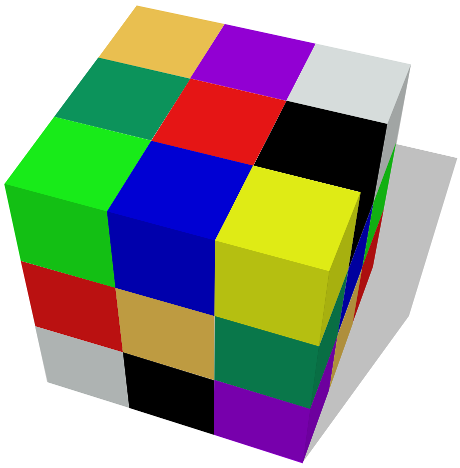
dominik.zobel@tu-harburg.de

version: Mai 2015

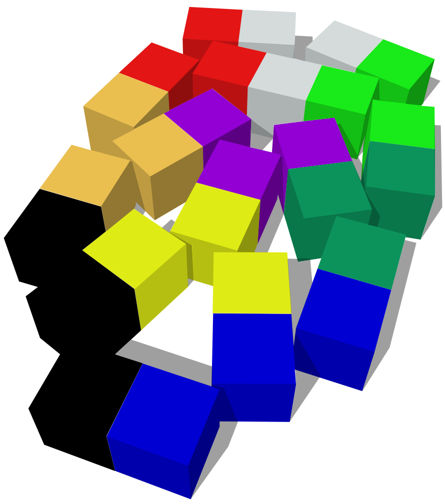
Inhaltsverzeichnis

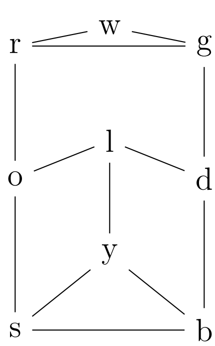
1 Spielbeschreibung

Das Spiel besteht aus dreizehn farbigen, quaderförmigen Klötzen. Zwölf der dreizehn Klötze sind zweifarbig, einer ist dreifarbig (rot, weiß und grün). Da die farbigen Bereiche aller Klötze gleich groß sind, kann daraus ein Würfel mit der Seitenlänge von drei Farbbereichen gebildet werden.



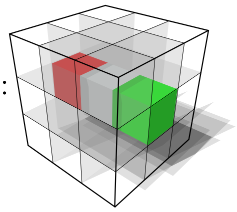
Es gibt neun verschiedene Farben und jede Farbe kommt exakt dreimal vor. An einem Klotz sind immer verschiedene Farben und es gibt keine gleichen Klötze. Somit ist jede Farbe mit drei der acht anderen Farben verbunden. Der Zusammenhang der Farben an den Klötzen ist links graphisch und rechts schematisch dargestellt. Dabei stehen die Buchstaben für die Anfangsbuchstaben der Farbe (jedoch y für gelb und d für dunkelgrün).

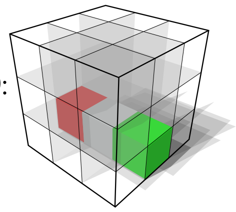


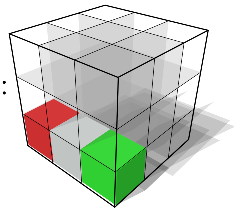


Ziel des Spieles ist es, aus den Klötzen einen großen Würfel zusammenzusetzen und dabei die Klötze so anzuordnen, dass jede Farbe auf jeder der sechs Seiten des Würfels exakt einmal vorkommt. Im Lauf dieser Ausarbeitung werden alle Varianten aufgezeigt, die zu diesem Ziel führen (sofern kein Fehler unterlaufen ist).

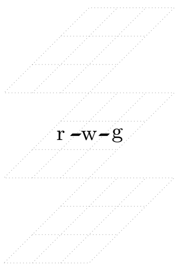
Zuerst einmal fällt jedoch auf, dass es gar nicht so viele Möglichkeiten gibt, den dreiteiligen Klotz anzuordnen. Nach Drehen/Spiegeln des Würfels bleiben letztendlich nur drei unterschiedliche Möglichkeiten: Entweder geht der Dreierstab durch die Mitte des Würfels (A), oder er geht von Kante zu Kante durch eine Seitenmitte (B), oder er geht von Ecke zu Ecke entlang einer Seitenkante (C).

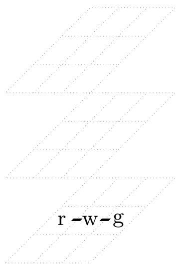
(A): 

(B): 

(C): 

Schematisch sieht das folgendermaßen aus:

(A): 

(B): 

(C): 

In Kapitel 2 werden die zielführenden Kombinationen für die drei Varianten aufgelistet. Dabei veranschaulicht Kapitel 3, dass für Variante (B) keine geometrische Lösung möglich ist, da der letzte der zwölf Klötze geteilt werden müsste. Für die Varianten (A) und (C) werden in Kapitel 4 und 5 aufgezeigt, wie die Klötze angeordnet werden müssen, dass alle neun Farben auf jeder der sechs Würfelseiten exakt einmal vorkommen.

2 Zahlenkombinationen

Da jede Farbe auch auf der Unterseite nur einmal vorkommen soll, können wir ohne Einschränkung die Farben der unteren Ebene wie folgt nummerieren:

Dabei gilt für jede der sechs Seiten:

- Ein Farbeintrag in einer Ecke (*hier:* 1, 3, 7 und 9) ist gleichzeitig auch auf zwei anderen Seiten.
- Ein Farbeintrag an einer Kante (*hier:* 2, 4, 6 und 8) befindet sich gleichzeitig auch auf einer anderen Seite.
- Ein Farbeintrag in der Seitenmitte (*hier:* 5) ist nur auf dieser Seite.

Damit eine Farbe auf allen sechs Seiten sichtbar ist, während sie sie nur an drei Klötzen zu finden ist, müssen die folgenden Aussagen für alle Farben gelten:

1. Wenn sich eine Farbe in der Mitte des Würfels befindet, so muss sie auch in gegenüberliegenden Ecken des großen Würfels sein.
2. Wenn sich eine Farbe nicht in der Mitte sondern in einer Ecke des Würfels befindet, so muss sie auch an einer Kante des Würfels und an einer Seitenmitte sein.
3. Wenn sich eine Farbe nicht in der Mitte und in keiner Ecke des Würfels befindet, so befindet sich die Farbe an drei Seitenkanten des Würfels.
4. Wenn sich eine Farbe nicht in der Mitte und in keiner Seitenmitte des Würfels befindet, so befindet sich die Farbe an drei Seitenkanten des Würfels.

Im Folgenden repräsentiert 1 die Farbe des Würfels in der Mitte:

```
    1



  1


    7 8 9
  4 5 6
1 2 3
```

Es gibt jetzt prinzipiell neun Möglichkeiten, die Würfel 3, 7 und 9 auf den anderen beiden Ebenen zu platzieren, so dass sie auf allen sechs Seiten genau einmal zu sehen sind. Da sie sich in der unteren Ebene in den Ecken befinden, dürfen sie nicht in den Ecken der oberen Ebene auftauchen. Gleichzeitig muss die 5 auf jeden Fall in einer Ecke der obersten Ebene und in einer Ecke der zweiten Ebene (Kante des Würfels) auftauchen.

Bestimmt man alle Möglichkeiten, wie die neun Zahlen kombiniert werden können, dass sie auf jeder Seite exakt einmal auftauchen, so ergeben sich die folgenden zehn Möglichkeiten:

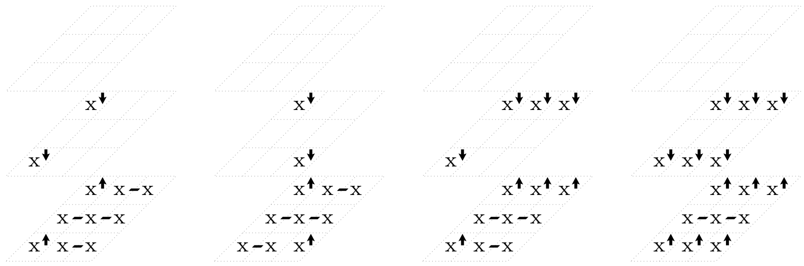
```
    6 4 1         2 4 1         2 3 1         2 3 1
  3 9 2         3 9 7         9 7 8         9 7 8
5 7 8         5 6 8         6 4 5         5 6 4
    2 3 5         6 3 5         5 6 4         6 4 5
  8 1 7         8 1 2         3 1 2         3 1 2
9 6 4         9 7 4         8 9 7         8 9 7
    7 8 9         7 8 9         7 8 9         7 8 9
  4 5 6         4 5 6         4 5 6         4 5 6
1 2 3         1 2 3         1 2 3         1 2 3

    6 3 1         2 3 1         5 3 1         2 3 1
  8 9 2         8 9 7         2 9 7         8 9 7
5 7 4         5 6 4         8 6 4         6 4 5
    2 4 5         6 4 5         6 4 2         5 6 4
  3 1 7         3 1 2         3 1 8         3 1 2
9 6 8         9 7 8         9 7 5         9 7 8
    7 8 9         7 8 9         7 8 9         7 8 9
  4 5 6         4 5 6         4 5 6         4 5 6
1 2 3         1 2 3         1 2 3         1 2 3

    5 6 1         2 6 1
  2 3 7         8 3 7
8 9 4         5 9 4
    3 4 2         3 4 5
  9 1 8         9 1 2
6 7 5         6 7 8
    7 8 9         7 8 9
  4 5 6         4 5 6
1 2 3         1 2 3
```

Natürlich steht bisher noch jede Zahl für eine beliebige Farbe. Für die erste Farbe gibt es somit neun mögliche Zuordnungen, für die zweite acht, usw. Das heißt, es gibt theoretisch $10 \cdot 9! = 3\,628\,800$ Möglichkeiten.

Für die einzelnen Varianten in Kapitel 4 und 5 müssen nicht alle zehn aufgezeigten Möglichkeiten untersucht werden, da durch eine vorgegebene Struktur des Dreierklotzes (und der Farbe in der Mitte) noch Symmetrien genutzt werden können.

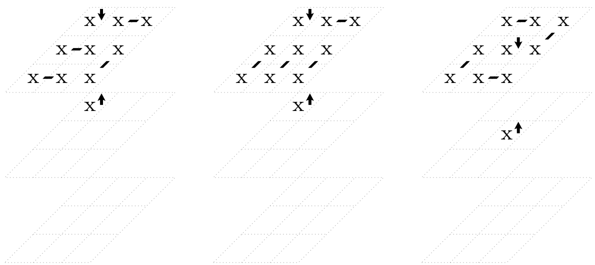
3 Formkombinationen

Neben den Farben kann untersucht werden, welcher Aufbau der Klötze zu einem vollständigen Würfel führt. Dabei hat sich gezeigt, dass Variante B keine geometrische Lösungen hat. Für diese Variante gibt es vier unterschiedliche Möglichkeiten, die unterste Ebene zu füllen:

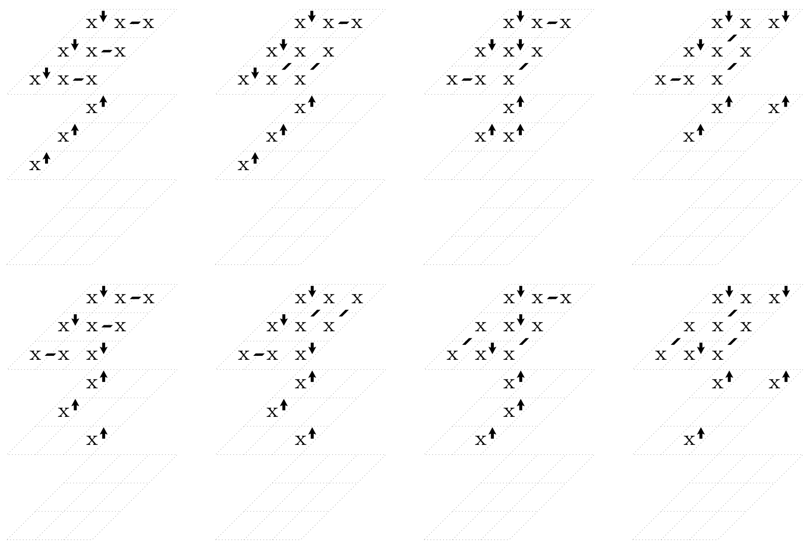


Allgemein kann die oberste Ebene nur mit einer der 20 im Folgenden dargestellten Möglichkeiten gefüllt werden.

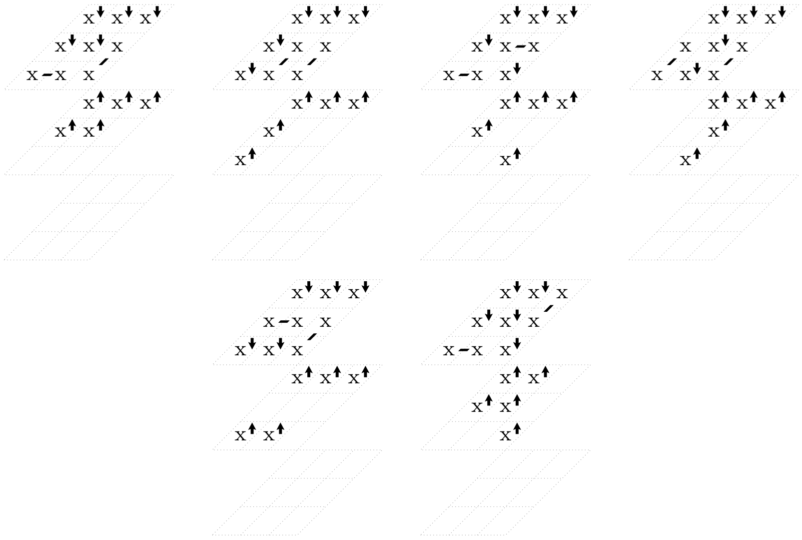
1 vertikal:



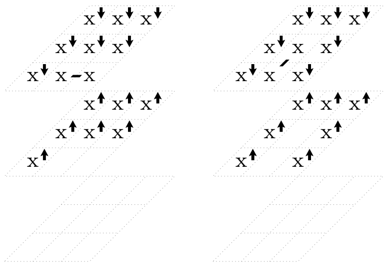
3 vertikal:



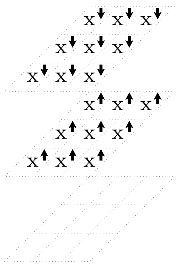
5 vertikal:



7 vertikal:



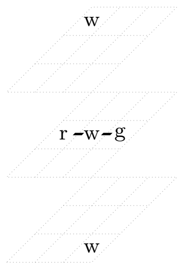
9 vertikal:



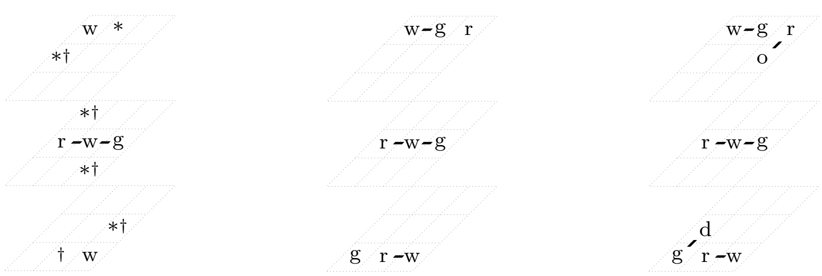
Es lässt sich jedoch keine der vier Möglichkeiten für (B) in eine der dargestellten Formen überführen. Somit ist keine Lösung für (B) möglich.

4 Kombinationen für Variante A

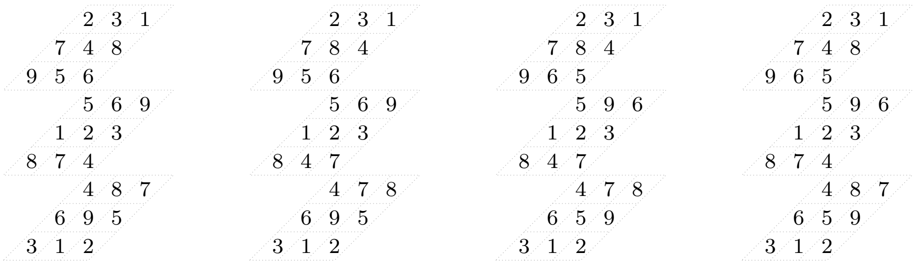
Bei dieser Variante befindet sich der weiße Würfel immer in der Mitte. Folglich müssen die beiden anderen weißen Würfel in zwei gegenüberliegenden Ecken des großen Würfels wieder auftauchen. Hier können wieder alle Kombinationen so gedreht oder gespiegelt werden, dass für Variante A folgendes gilt:



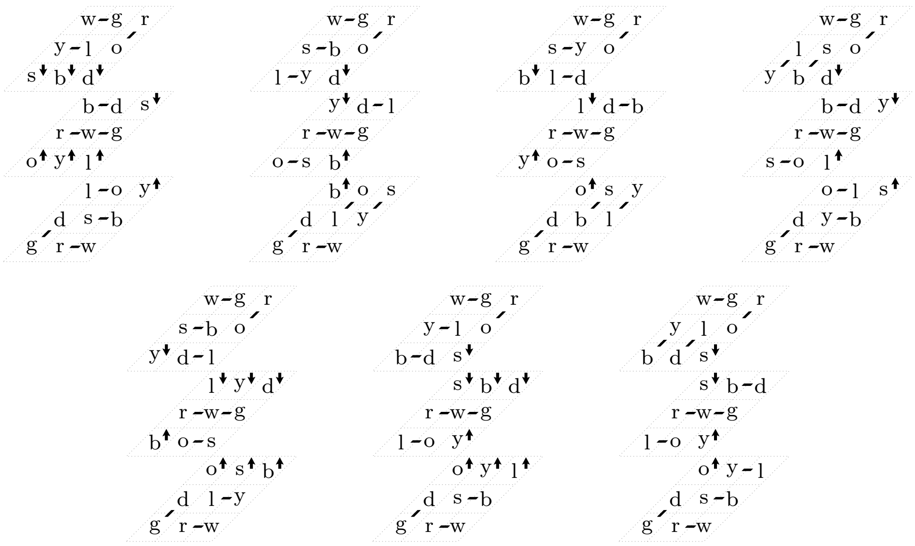
Da sich weiß neben dem Dreierklotz auch an einem Klotz mit rot und an einem mit grün befindet, kann überprüft werden, wie die Klötze im Gesamtwürfel liegen müssen. Der rote Würfel kann sich nicht an den mit * gekennzeichneten Stellen befinden, der Grüne nicht an denen mit †. Schließlich darf keine Farbe zweimal in einer Ebene auftauchen. Es bleibt nur die in der Mitte dargestellte Variante übrig. Wird noch die Tatsache genutzt, dass rot am Klotz rot–orange und grün am Klotz grün–dunkelgrün sein muss, dann gibt es prinzipiell vier Möglichkeiten, von denen auf Grund von Geometrie und Symmetrie nur die rechts dargestellte Variante übrig bleibt.



An dieser Stelle wurde überprüft, wie viele Möglichkeiten existieren, die Zahlen 1—9 so anzuordnen, dass sie stellvertretend für die Farben auf jeder Seite einmal vorkommen. Wieder darf auf jeder Ebene (horizontal und die beiden vertikalen) jede Zahl nur einmal auftauchen. Es wurden Zahlen verwendet, damit sie anschließend systematisch durch alle noch zulässigen Farben (die Buchstaben) ersetzt werden können. Als Voraussetzung gilt: 1=r, 2=w, 3=g. Dann gibt es nur die folgenden vier Kombinationen:



Der Rest besteht aus Ausprobieren. Für die oben dargestellte Ausgangssituation werden für jede der vier Kombinationen alle Möglichkeiten durchprobiert. Es ergeben sich die folgenden sieben Möglichkeiten für (A):



Wie man sich an Hand des Dreierklotzes klar machen kann, sind das die einzigen Varianten, bei denen sich ein weißer Würfel in der Mitte befinden kann.

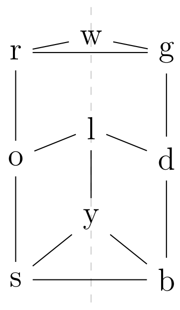
rot	weiß	grün	orange	dunkelgrün	lila	schwarz	blau	gelb
–	7	–	–	–	–	–	–	–

Erfolgreiche Kombinationen dieser Variante, getrennt nach Farbe der Mitte

5 Kombinationen für Variante C

Bei Variante C werden zuerst zwei wichtige Fälle unterschieden:

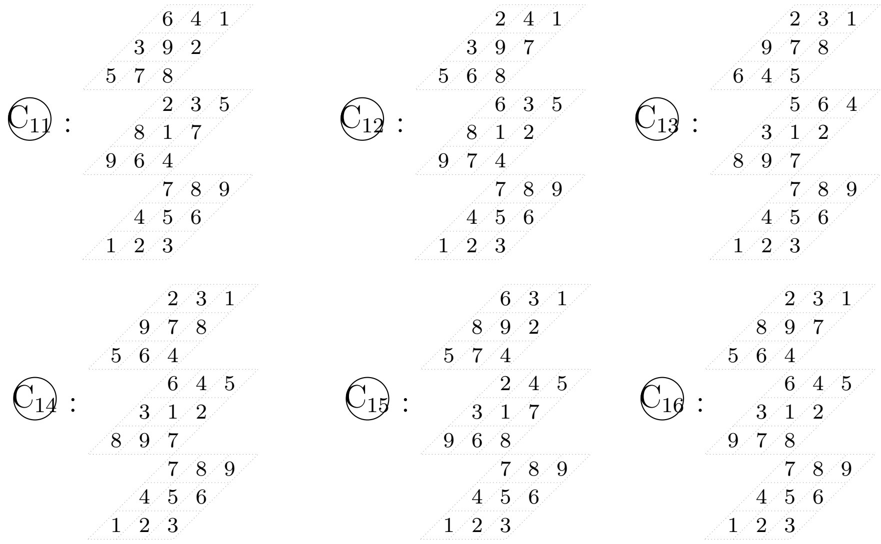
Zum einen soll untersucht werden, welche Kombinationen möglich sind, wenn sich rot (oder grün) in der Mitte befindet C_1. Dabei ist die Untersuchung einer Farbe (roter Würfel in der Mitte) ausreichend, da die gleichen Möglichkeiten auch für den grünen Würfel gelten, wenn orange und dunkelgrün sowie schwarz und blau ebenfalls getauscht werden. Die Steine sind sozusagen „farbsymmetrisch“, was man an der schematischen Darstellung erkennen kann (gestrichelte vertikale Linie als Symmetrieachse). Es ändern sich nur die Farben, nicht aber die Geometrie. Rot wird zu grün, orange zu dunkelgrün, schwarz zu blau, aber weiß, lila und gelb bleiben gleich (liegen sozusagen auf der Symmetrieachse).



Zum anderen muss untersucht werden, wie sich ein andersfarbiger Würfel in der Mitte auswirkt C_2. Da sich die Farbe des Würfels in der Mitte auch in zwei gegenüberliegenden Ecken befinden muss, gibt es zwei Möglichkeiten. Auf Grund der Farbsymmetrie reicht es aber aus, nur eine Möglichkeit zu betrachten. Hier muss lediglich beachtet werden, dass am Ende nicht die Häufigkeit einer Farbe verdoppelt wird, sondern die Häufigkeit jeweils der Farbe und dem Symmetriepartner zuzuschreiben ist.

5.1 Variante C_1

Eingangs sollen erneut alle Zahlenkombinationen untersucht werden. Auch hier gilt wieder: 1=r, 2=w, 3=g. Dann bleiben noch die folgenden sechs Kombinationen:



Jetzt muss bei allen Kombinationen nachgeprüft werden, ob ein Würfel mit jeder Farbe auf jeder Seite gebaut werden kann.

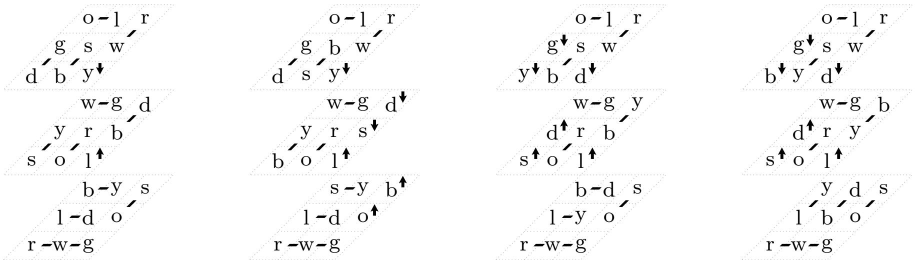
Wie im Folgenden aufgeschlüsselt wird, gibt es für C_1 insgesamt 49 Möglichkeiten mit rot in der Mitte. Wegen der Farbsymmetrie gibt es weitere 49 Möglichkeiten mit grün in der Mitte.

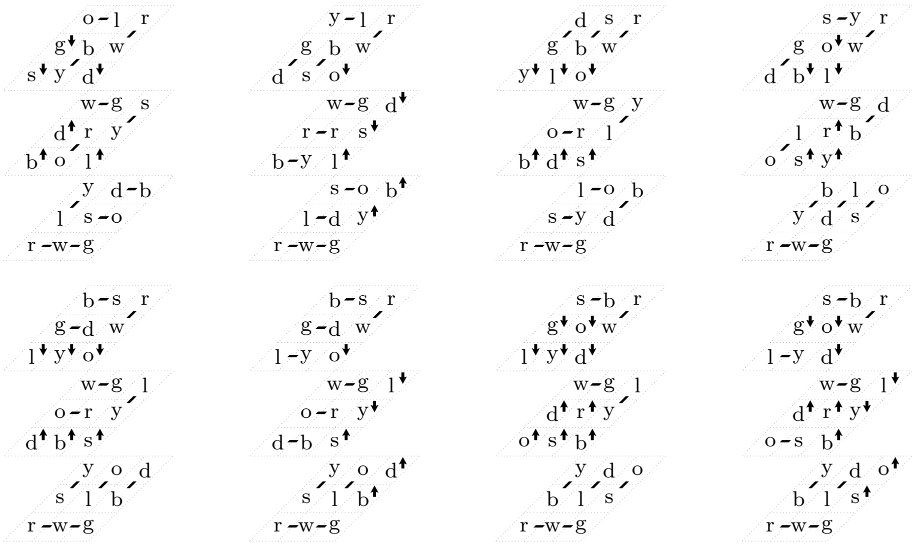
rot	weiß	grün	orange	dunkelgrün	lila	schwarz	blau	gelb
49	–	49	–	–	–	–	–	–

Erfolgreiche Kombinationen dieser Variante, getrennt nach Farbe der Mitte

5.1.1 Details C_{11}

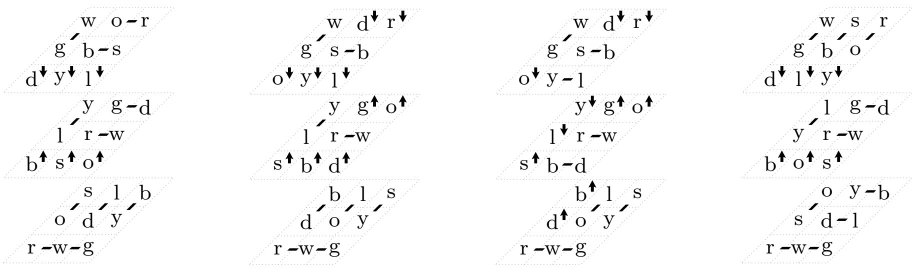
Für diese Variante gibt es die folgenden zwölf Kombinationen:





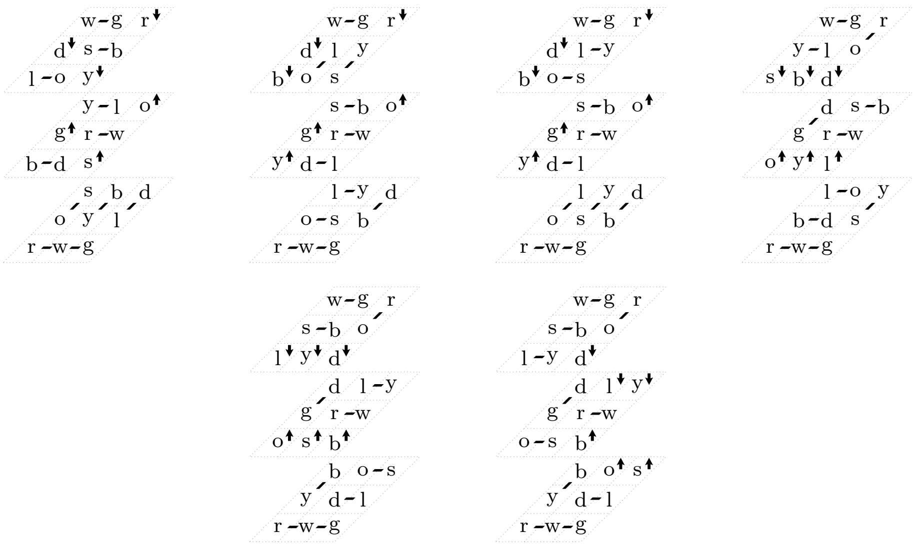
5.1.2 Details C_{12}

Für diese Variante gibt es die folgenden vier Kombinationen:



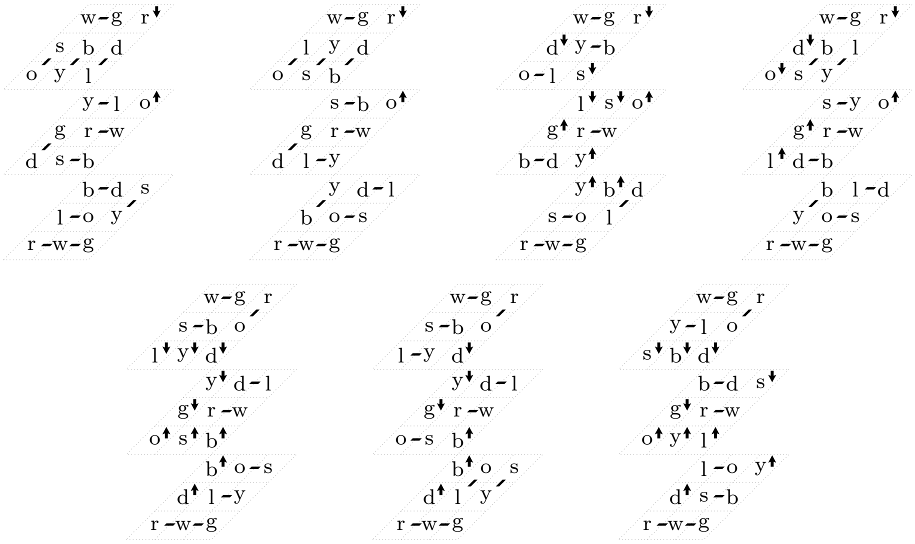
5.1.3 Details C_{13}

Für diese Variante gibt es die folgenden sechs Kombinationen:



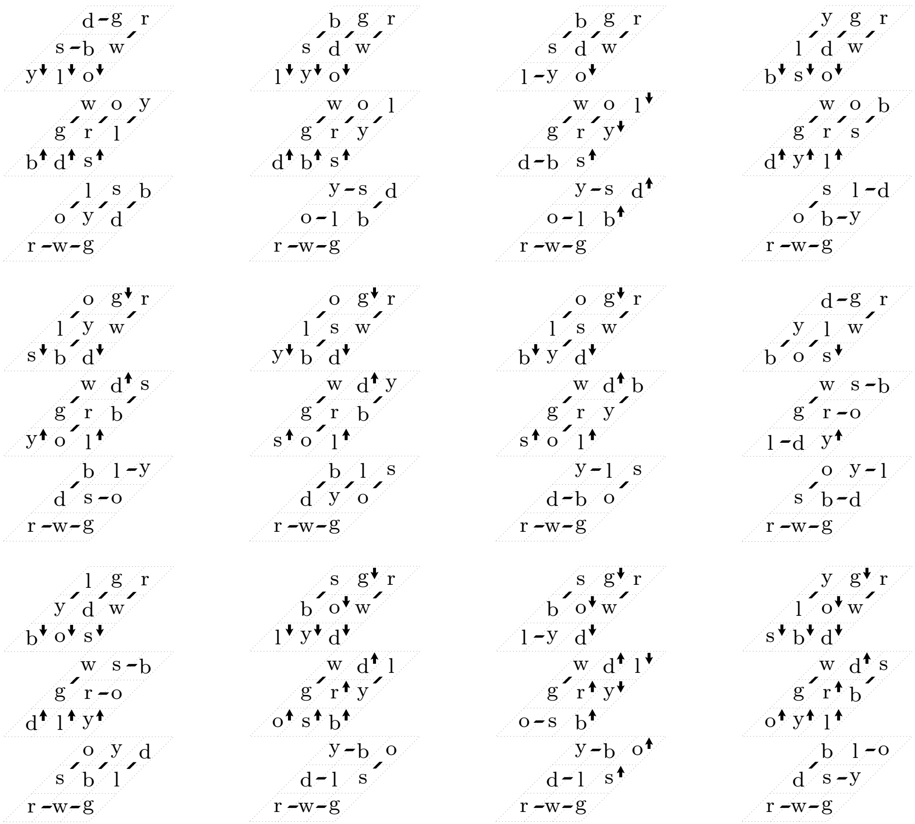
5.1.4 Details C_{14}

Für diese Variante gibt es die folgenden sieben Kombinationen:



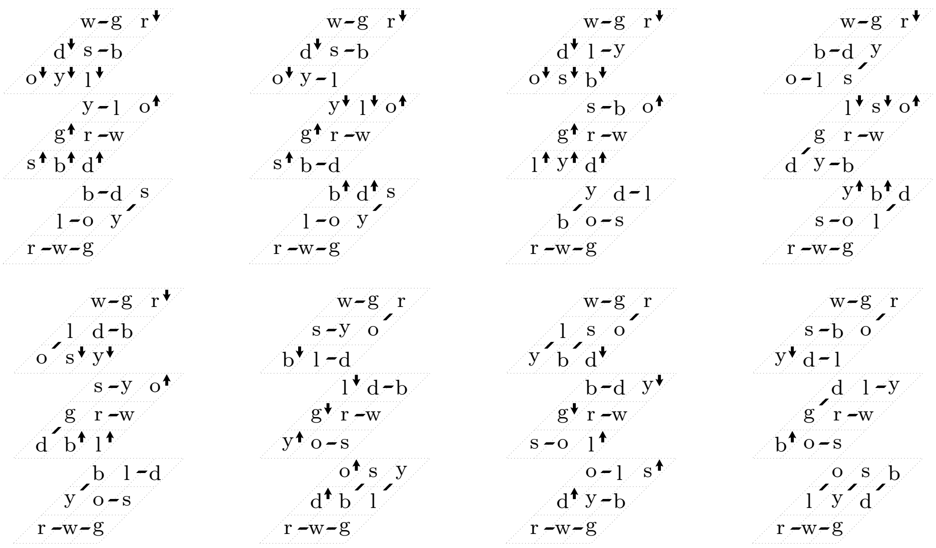
5.1.5 Details C_{15}

Für diese Variante gibt es die folgenden zwölf Kombinationen:



5.1.6 Details C_{16}

Für diese Variante gibt es die folgenden acht Kombinationen:



5.2 Variante C_2

Als letztes gilt es zu überprüfen, welche Kombinationen möglich sind, wenn sich weder rot noch grün (noch weiß) in der Mitte befinden C_2. Auch hier gilt wieder: 1=r, 2=w, 3=g. Es ergeben sich die folgenden neun Kombinationen:

C_{21} :

5	3	4
2	9	1
8	6	7
6	1	2
3	7	8
9	4	5
7	8	9
4	5	6
1	2	3

C_{22} :

6	4	5
2	3	1
8	9	7
3	1	2
9	7	8
5	6	4
7	8	9
4	5	6
1	2	3

C_{23} :

5	6	4
2	3	1
8	9	7
3	1	2
9	7	8
6	4	5
7	8	9
4	5	6
1	2	3

C_{24} :

5	1	4
2	3	8
6	9	7
3	6	2
9	7	1
8	4	5
7	8	9
4	5	6
1	2	3

C_{25} :

2	6	4
8	3	1
5	9	7
3	1	5
9	7	2
6	4	8
7	8	9
4	5	6
1	2	3

C_{26} :

2	3	4
8	9	1
5	6	7
6	1	5
3	7	2
9	4	8
7	8	9
4	5	6
1	2	3

C_{27} :

6	4	5
3	1	2
8	9	7
2	3	1
9	7	8
5	6	4
7	8	9
4	5	6
1	2	3

C_{28} :

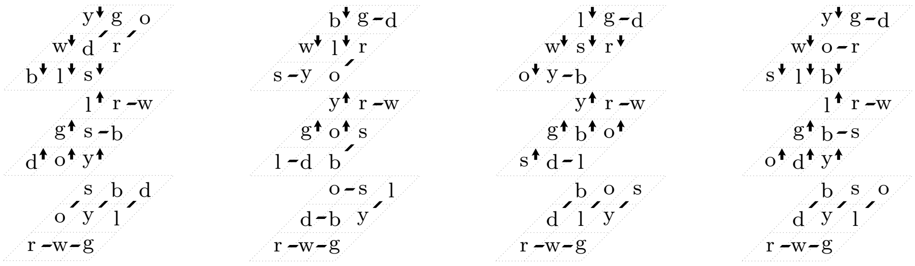
5	6	4
3	1	2
8	9	7
2	3	1
9	7	8
6	4	5
7	8	9
4	5	6
1	2	3

C_{29} :

5	1	2
9	3	8
6	4	7
3	6	4
2	7	1
8	9	5
7	8	9
4	5	6
1	2	3

5.2.1 Details C_{21}

Für diese Variante gibt es die folgenden vier Kombinationen:



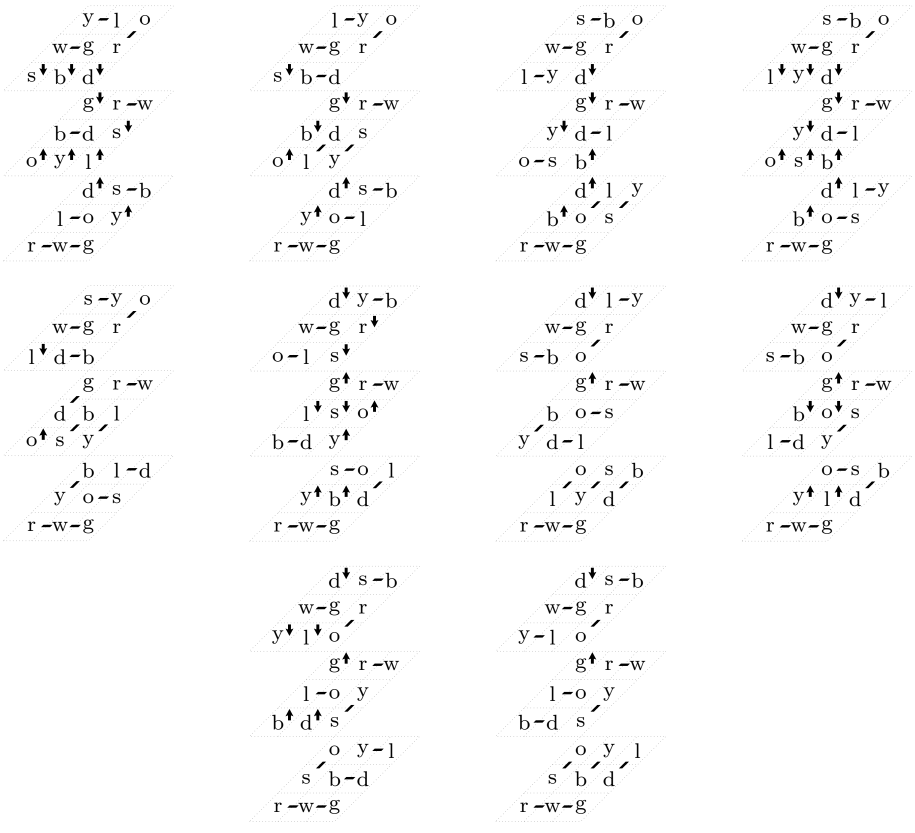
Das heißt unter Berücksichtigung der Farbsymmetrie ergibt sich:

rot	weiß	grün	orange	dunkelgrün	lila	schwarz	blau	gelb
–	–	–	1	1	–	3	3	–

Erfolgreiche Kombinationen dieser Variante, getrennt nach Farbe der Mitte

5.2.2 Details C_{22}

Für diese Variante gibt es die folgenden zehn Kombinationen:



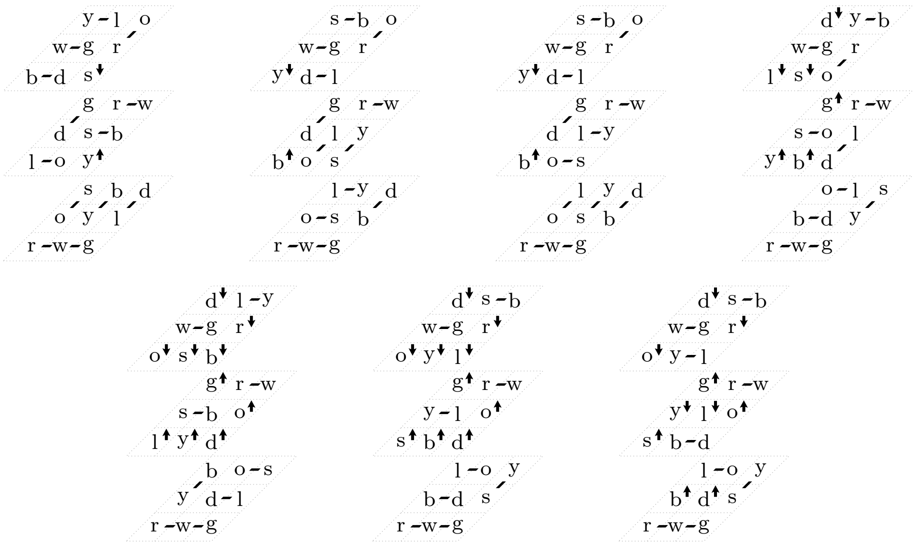
Das heißt unter Berücksichtigung der Farbsymmetrie ergibt sich:

rot	weiß	grün	orange	dunkelgrün	lila	schwarz	blau	gelb
–	–	–	8	8	–	2	2	–

Erfolgreiche Kombinationen dieser Variante, getrennt nach Farbe der Mitte

5.2.3 Details C_{23}

Für diese Variante gibt es die folgenden sieben Kombinationen:



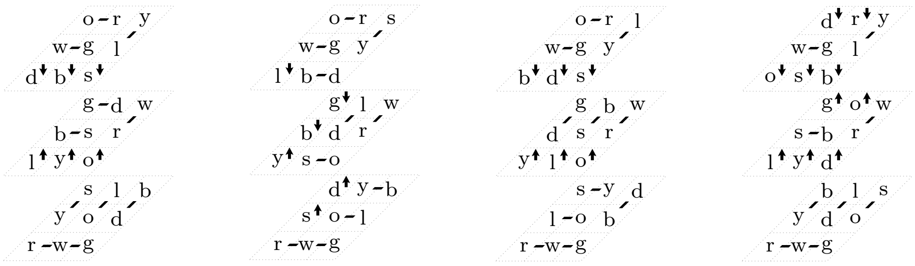
Das heißt unter Berücksichtigung der Farbsymmetrie ergibt sich:

rot	weiß	grün	orange	dunkelgrün	lila	schwarz	blau	gelb
–	–	–	1	1	8	2	2	–

Erfolgreiche Kombinationen dieser Variante, getrennt nach Farbe der Mitte

5.2.4 Details C_{24}

Für diese Variante gibt es die folgenden vier Kombinationen:



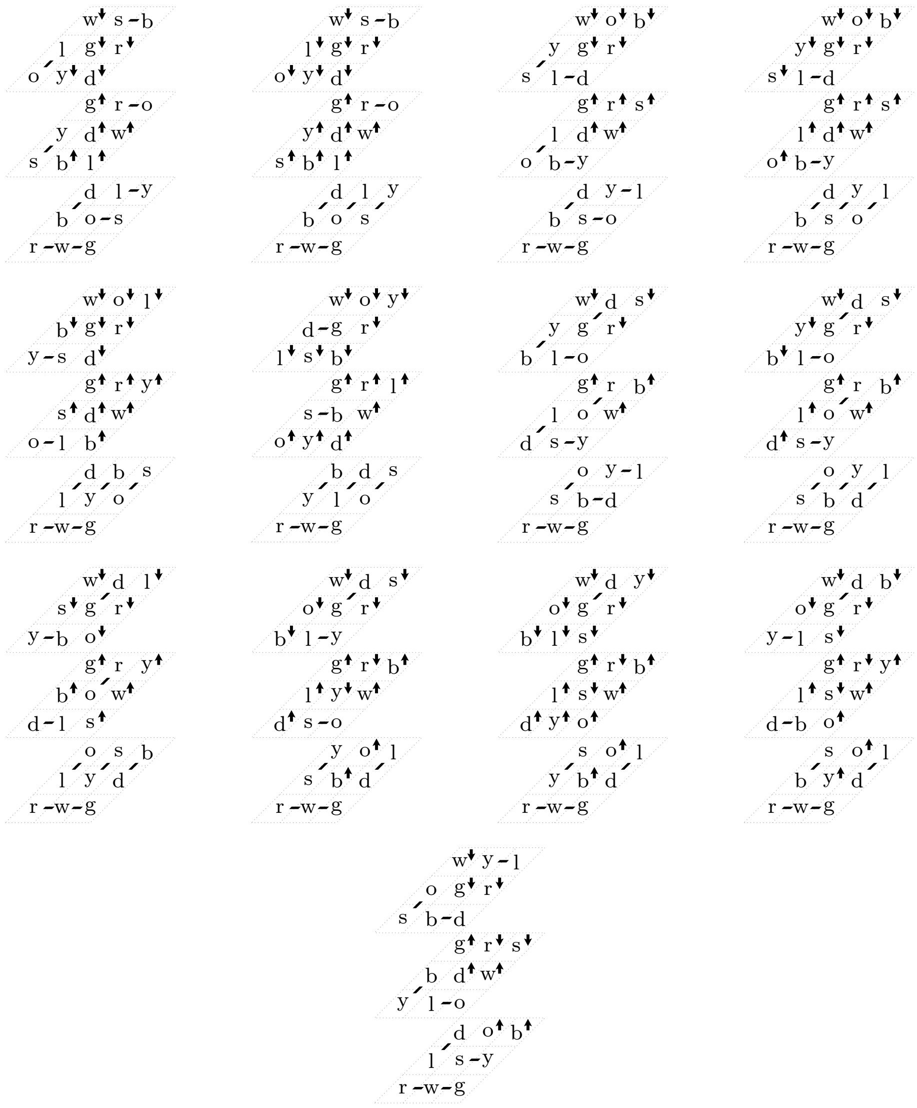
Das heißt unter Berücksichtigung der Farbsymmetrie ergibt sich:

rot	weiß	grün	orange	dunkelgrün	lila	schwarz	blau	gelb
–	–	–	1	1	–	3	3	–

Erfolgreiche Kombinationen dieser Variante, getrennt nach Farbe der Mitte

5.2.5 Details C_{25}

Für diese Variante gibt es die folgenden dreizehn Kombinationen:



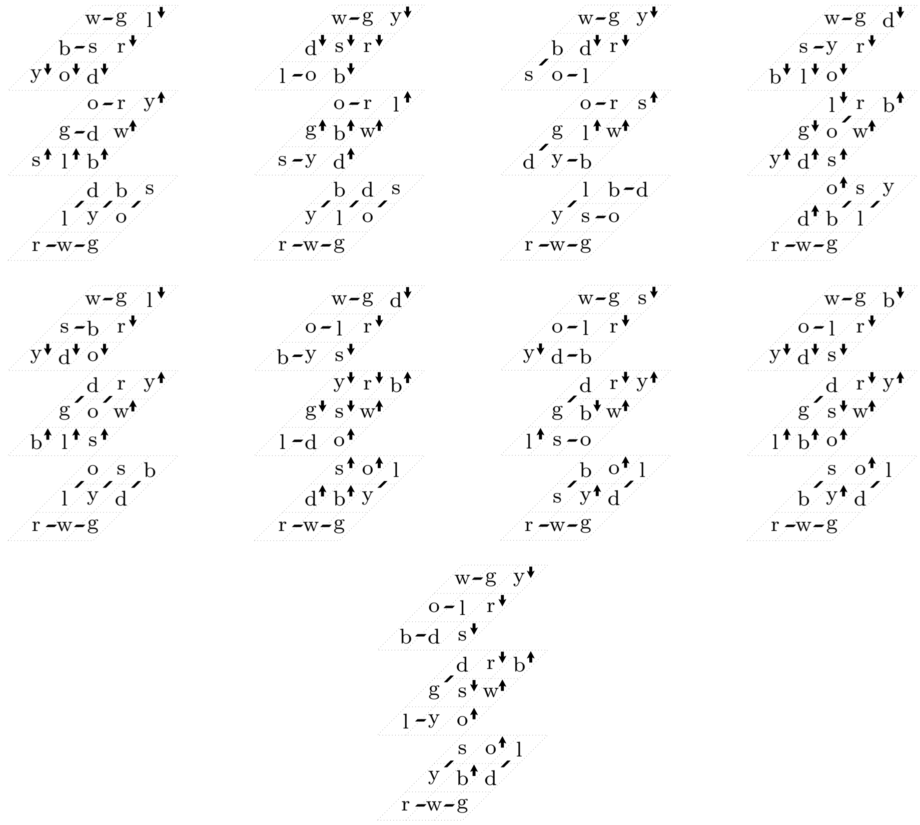
Das heißt unter Berücksichtigung der Farbsymmetrie ergibt sich:

rot	weiß	grün	orange	dunkelgrün	lila	schwarz	blau	gelb
–	–	–	9	9	–	3	3	2

Erfolgreiche Kombinationen dieser Variante, getrennt nach Farbe der Mitte

5.2.6 Details C_{26}

Für diese Variante gibt es die folgenden neun Kombinationen:



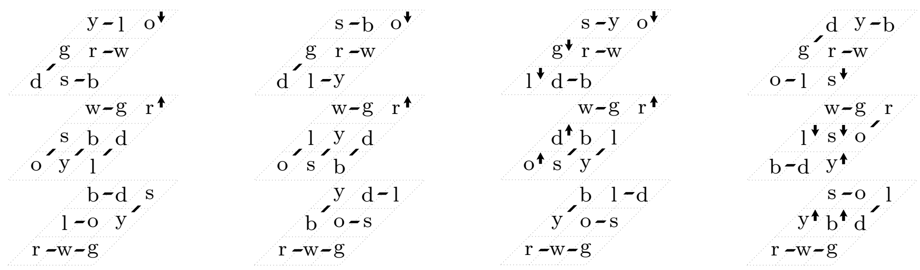
Das heißt unter Berücksichtigung der Farbsymmetrie ergibt sich:

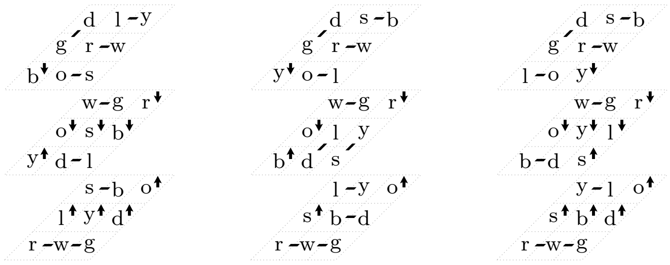
rot	weiß	grün	orange	dunkelgrün	lila	schwarz	blau	gelb
–	–	–	3	3	2	5	5	–

Erfolgreiche Kombinationen dieser Variante, getrennt nach Farbe der Mitte

5.2.7 Details C_{27}

Für diese Variante gibt es die folgenden sieben Kombinationen:





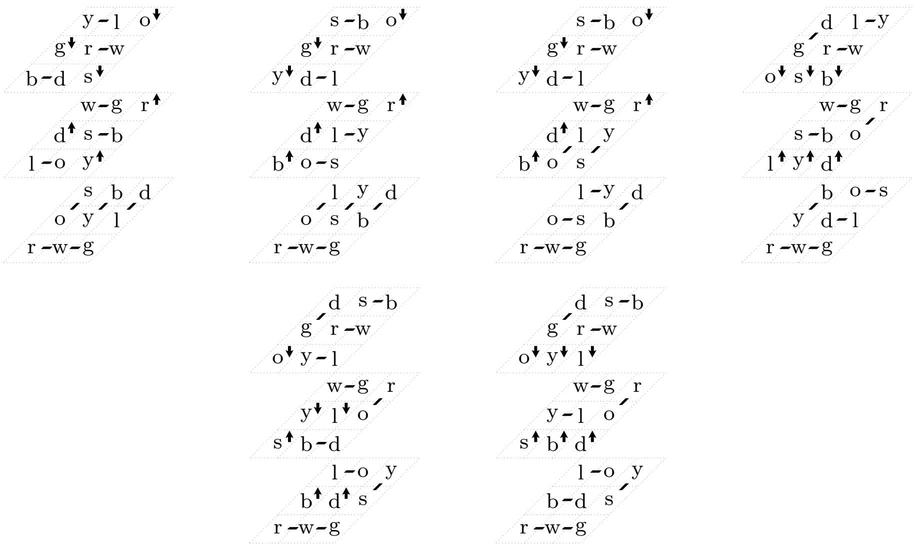
Das heißt unter Berücksichtigung der Farbsymmetrie ergibt sich:

rot	weiß	grün	orange	dunkelgrün	lila	schwarz	blau	gelb
–	–	–	–	–	2	4	4	4

Erfolgreiche Kombinationen dieser Variante, getrennt nach Farbe der Mitte

5.2.8 Details C_{28}

Für diese Variante gibt es die folgenden sechs Kombinationen:



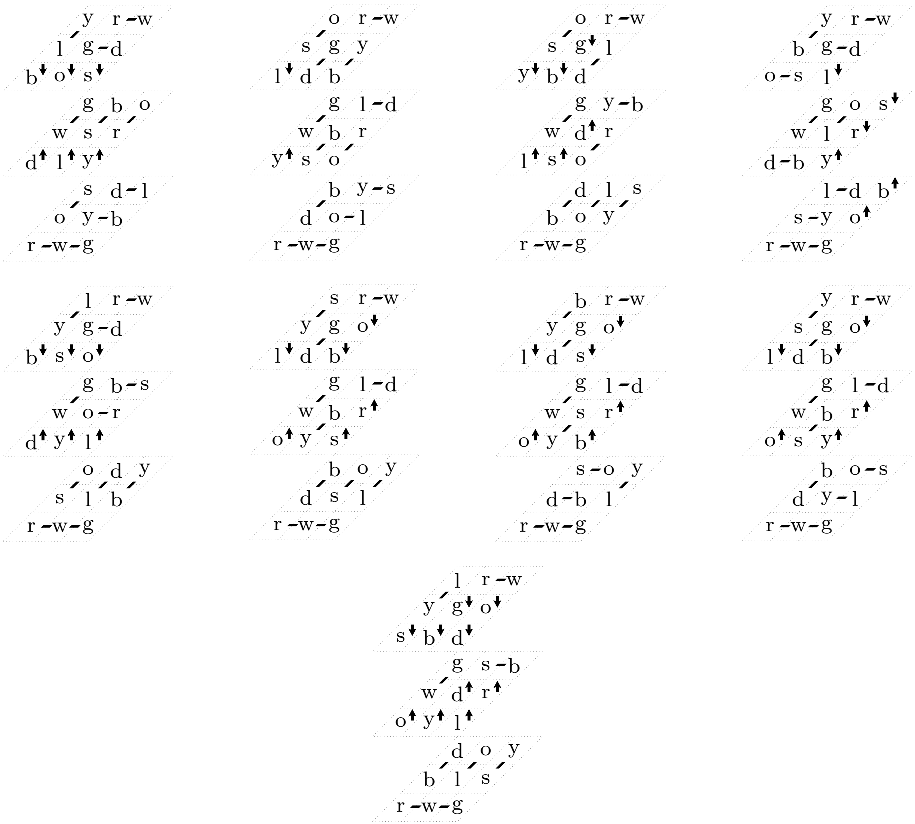
Das heißt unter Berücksichtigung der Farbsymmetrie ergibt sich:

rot	weiß	grün	orange	dunkelgrün	lila	schwarz	blau	gelb
–	–	–	–	–	8	2	2	–

Erfolgreiche Kombinationen dieser Variante, getrennt nach Farbe der Mitte

5.2.9 Details C_{29}

Für diese Variante gibt es die folgenden neun Kombinationen:



Das heißt unter Berücksichtigung der Farbsymmetrie ergibt sich:

rot	weiß	grün	orange	dunkelgrün	lila	schwarz	blau	gelb
–	–	–	3	3	2	5	5	–

Erfolgreiche Kombinationen dieser Variante, getrennt nach Farbe der Mitte

6 Zusammenfassung

Sofern sich keine Fehler eingeschlichen haben, gibt es somit insgesamt 243 unterschiedliche Möglichkeiten, das Spiel erfolgreich zu beenden. Unterschiedlich heißt, wie ganz am Anfang angedeutet, dass sich diese Möglichkeiten nicht durch Drehung oder Spiegelung des Würfels in eine andere aufgezählte Variante überführen lassen.

rot	weiß	grün	orange	dunkelgrün	lila	schwarz	blau	gelb
49	7	49	26	26	22	29	29	6

Erfolgreiche Kombinationen insgesamt, getrennt nach Farbe der Mitte

Dabei entspricht Variante (A) den sieben Möglichkeiten für weiß in der Mitte, Variante (B) hat keine Lösungen und Variante (C) enthält die restlichen 236 Möglichkeiten. Es gibt für (C_1) 98 Möglichkeiten (rot und grün) und für (C_2) 138 Möglichkeiten (alle anderen).