Notizen zu

Mechanik

Dominik Zobel

dominik.zobel@tu-harburg.de

Version: Februar 2014

Änderung(en): Satzbau und Einheiten (S. 4 und S. 16)

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Entstehung

In den ersten Semestern meines Studiums war die Technische Mechanik einfach ein unüberschaubar weitläufiges Fach, das man irgendwie hinter sich bringen ~~wollte~~ musste. Erst nach und nach habe ich erkannt, dass hier viele Grundlagen vermittelt werden, die unabhängig von der späteren Ausrichtung für einen Ingenieur unerlässlich sind. Vielleicht braucht man einfach genügend Zeit, um die Mechanik und die Ideen dahinter zu verstehen. Vielleicht hilft aber auch ein guter Überblick, um den Prozess zu beschleunigen. Da man in den ersten Semestern oft weder Zeit noch einen Überblick hat (und der Stoffumfang einen ganz gut erschlagen kann) wäre eine leicht zu lesende Zusammenfassung genau das richtige. Ich weiß nicht, ob diese Zusammenschrift dem gerecht wird, aber ich hoffe es.

Freigabe

Wie das zu lesen ist

Ich habe versucht, zu jedem Grundlagenthema der Mechanik einen Abschnitt zu schreiben. Im ersten Kapitel werden die wichtigsten Begriffe und die mathematischen Grundlagen vorgestellt. Themen der Statik und Elastostatik folgen in Kapitel 2 und 3. Geplant sind noch Relativkinematik, Kontinuumsmechanik und Schwingungen.

Jeder Abschnitt ist so aufgebaut, dass nach einem kurzen Überblick zum Thema idealerweise die wichtigsten Informationen und Formeln zusammengetragen sind. Die Reihenfolge der Abschnitte ist so gewählt, dass das nötige Vorwissen schon in einem der vorangegangenen

Abschnitte erklärt worden ist. Falls dem nicht so ist, oder wichtige Informationen fehlen, dann freue ich mich über entsprechende Anregungen und Kritik.

Die Gleichungen sind mit (#Seitenzahl.#Nummer) durchnummeriert. Es finden sich auch folgende Abkürzungen:

ANS	:	Eine Merkregel oder anschauliche Erklärung.
EXT	:	Weiterführende Erklärungen oder Zusammenhänge, die für ein besseres Verständnis gut zu wissen sind.
SYN	:	Synonyme werden gegenüber gestellt, die gleichbedeutend sind.

Quellen und Dank

Die meisten Informationen stammen aus den Vorlesungen bzw. offiziellen Unterlagen zu Mechanik 1–4 der TU Hamburg-Harburg zwischen 2008 und 2012. Aus dem Technischen Taschenbuch (INA) stammen die Werte einiger Tabellen (z. B. Trägheiten oder Schwerpunkte). Alle Zeichnungen dieser Zusammenschrift sind selbst erstellt (mit Ausnahme des CC-Logos auf Seite iii), wobei manche an den Vorlesungsunterlagen oder dem INA orientiert sind.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Michael Szelwis und Robin Zinkmann bedanken. Durch Euch entstanden die Mechanik Lernwochenenden, die mich maßgeblich dazu veranlasst haben, das hier zu schreiben und zu veröffentlichen.

Teststadium

Abschließend möchte ich darauf hinweisen, dass sich diese Zusammenschrift noch nicht in ihrer Endversion befindet. Möglicherweise fehlen noch wichtige Informationen oder es haben sich Fehler eingeschlichen. Wie es sich für einen Ingenieur gehört, sollte man alles kritisch hinterfragen und bei Bedarf gegenprüfen oder widerlegen. Ich bin über jeden Hinweis auf Fehler dankbar und freue mich auch generell über konstruktive Kritik und Verbesserungsvorschläge.

Die neuste Version ist hinterlegt unter: http://seriousjr.kyomu.43-1.org/notizen/

Hamburg, 2013

1 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die mathematischen Grundlagen aufgeführt. Dabei werden wichtige Begriffe vorgestellt und Zusammenhänge verdeutlicht, die für das Verständnis und die Berechnung mechanischer Problemestellungen relativ zentral sind. Neben der Ausrichtung eines Koordinatensystems wird ein Schwerpunkt auf Winkelzusammenhänge und trigonometrische Funktionen gelegt. Abschließend werden wichtige Punkte der Vektorrechnung und die Koordinatentransformationen angesprochen.

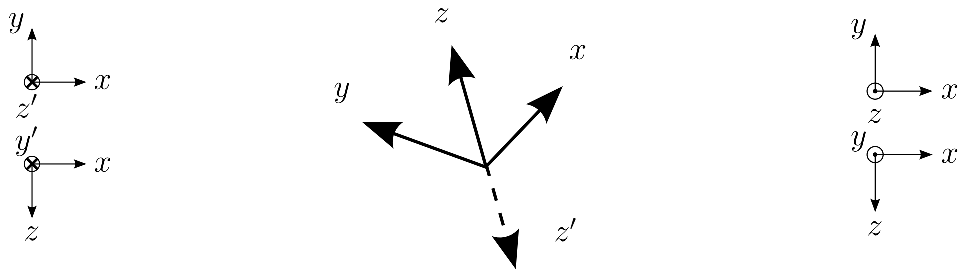
1.1 Begriffsklärung

Zuerst ein paar wichtige Begriffe, die im weiteren Verlauf ohne Erklärung vorkommen und als bekannt vorausgesetzt werden.

Balken	Ein quaderförmiger Körper, bei dem die Ausdehnung in eine Richtung länger ist als in die andere(n).
gegebene Größen	Werte (Längen, Kräfte, ...) die als bekannt angenommen werden. Das Ergebnis einer Rechnung ist ausschließlich in Zahlen und gegebenen Größen auszudrücken.
homogen	bezeichnet eine gleichmäßige Verteilung. Bei einem Körper mit homogener Dichte kann die gesamte Gewichtskraft im Schwerpunkt angenommen werden.
orthogonal	senkrecht/rechtwinklig zu etwas
Stab	Ein Körper, bei dem die Ausdehnung in eine Richtung länger ist als in die andere(n). Anders als beim Balken kann ein Stab nur Belastungen in Stabrichtungen aufnehmen bzw. übertragen.
starres System	Das System verformt sich nicht – es ist ideal steif/starr. Bei starren Systemen werden keine Biegungen oder Spannungen betrachtet.
System	Ein Bereich, in dem Belastungen wirken, die untersucht werden sollen. Beliebige (Teil-)Systeme können aus einer Umgebung freigeschnitten und untersucht werden.
zentrales Kräftesystem	Die Wirkungslinien aller Kräfte schneiden sich in einem Punkt. Es gibt hier keine Momente.

1.2 Koordinatensystem

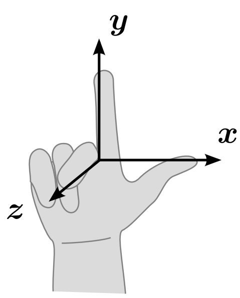
Es werden nur Orthogonalsysteme betrachtet (d. h. alle Koordinatenachsen stehen senkrecht aufeinander). Dabei lassen sich zwei Typen unterscheiden: Linkssysteme und Rechtssysteme. Beliebige Drehungen und Verschiebungen ändern den Typ des Koordinatensystems nicht. Hier werden nur Rechtssysteme betrachtet, da sich in Linkssystemen Vorzeichen im Kreuzprodukt und somit Momentengleichgewichte ändern. Ein Koordinatensystem kann – wenn nicht gegeben – frei gewählt werden.



Beispielhaft sind hier zwei Linkssysteme auf der linken Seite und zwei Rechtssysteme auf der rechten Seite dargestellt. Zeigt die dritte Achse in die Zeichenebene hinein, so ist sie mit $\otimes$ gekennzeichnet. Kommt sie aus der Zeichenebene heraus, so ist das mit $\odot$ angedeutet. In der Mitte ist zu sehen, wie durch Umkehren einer Achsenrichtung ein Linkssystem in ein Rechtssystem überführt werden kann. (Linkssystem x–y–z' und Rechtssystem x–y–z).

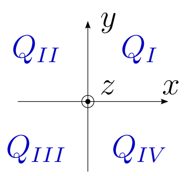
Um zu überprüfen, was für ein Koordinatensystem vorliegt, stellt man sich die Drehung einer einzelnen Koordinatenachse vor. Dreht man beispielsweise die x-Achse um $90\,°$ gegen den Uhrzeigersinn um die (positive) z-Achse, dann zeigt sie für ein Rechtssystem in die gleiche Richtung wie die y-Achse (in einem Linkssystem in die entgegengesetzte Richtung).

ANS



Rechte-Hand-Regel zur Überprüfung eines Rechtssystems. Der Daumen zeigt in x-Richtung, Zeigefinder in y-Richtung und Mittelfinger in z-Richtung. Analog wäre für Linkssysteme die linke Hand zu verwenden.

ANS



Eine Ebene kann am Koordinatensystem in Quadranten unterteilt werden. Dabei ist der erste Quadrant Q_I immer dort, wo beide Koordinatenrichtungen positiv sind. Anschließend wird für die restlichen Quadranten gegen den Uhrzeigersinn durchgezählt.

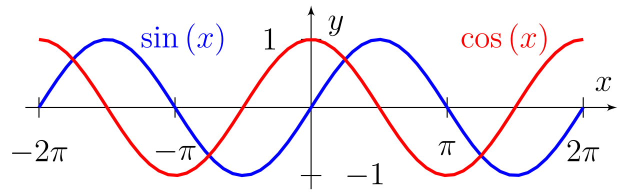
1.3
Sinus und Kosinus

Für Untersuchungen am Kreis oder Projektionen mit Winkeln ist die Verwendung der trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus elementar. Die Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung, die Kosinusfunktion spiegelsymmetrisch zur y-Achse. Beide Funktionen haben verwandte hyperbolische Funktionen.

a) Allgemeine Zusammenhänge

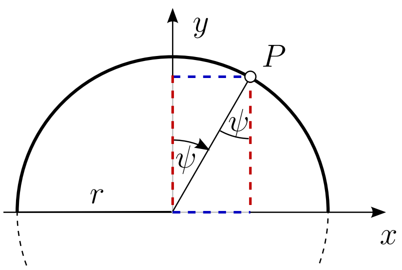
Winkel können im Bogenmaß oder in Grad angegeben werden. Die Umrechnung eines Winkels in Grad ($\alpha°$) zu einem Winkel im Bogenmaß (α') lautet:

$$\alpha' = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha° \tag{4.1}$$



$$\sin(x) = -\sin(-x)$$
$$\cos(x) = \cos(-x) \tag{4.2}$$

Wie man an den Funktionsverläufen und Gleichungen (4.2) sehen kann, ist der Sinus eine punktsymmetrische und der Kosinus eine spiegelsymmetrische Funktion. Beide Funktionen sind 2π-periodisch.



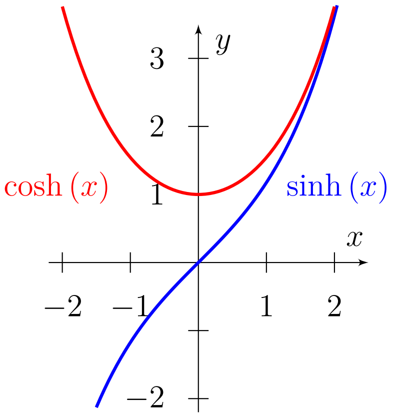
Die Kosinusfunktion kann auch als verschobene Sinusfunktion aufgefasst werden. Dieser Zusammenhang ist neben dem Funktionsgraphen auch am Kreis gut zu sehen. Zwischen dem oberen Schnittpunkt des Kreises mit der y-Achse, dem Kreismittelpunkt und dem Punkt P befindet sich der Winkel ψ. Dadurch ist $r\sin(\psi)$ der x-Anteil von P und $r\cos(\psi)$ der y-Anteil. Nach $\psi = 90° = \frac{\pi}{2}$ wird die Sinusfunktion zu Eins und die Kosinusfunktion zu Null. Der x-Anteil kann also auch als $r\cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)$ und der y-Anteil als $-r\sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)$ geschrieben werden.

Diese Verschiebung von Sinus und Kosinus kann ganz allgemein, wie beispielsweise in Gleichung (4.3), beschrieben werden.

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.3}$$

$\sin(0°)$	$=$	0	$=$	$\cos(90°)$
$\sin(30°)$	$=$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$=$	$\cos(60°)$
$\sin(45°)$	$=$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$=$	$\cos(45°)$
$\sin(60°)$	$=$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$=$	$\cos(30°)$
$\sin(90°)$	$=$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$=$	$\cos(0°)$

b) Hyperbolische Funktionen



Neben den normalen Sinus– und Kosinusfunktionen gibt es noch die hyperbolischen Funktionen.[1] Eine $\sinh(x)$ Funktion ist ebenfalls punktsymmetrisch und eine $\cosh(x)$ Funktion spiegelsymmetrisch. Hier ist aber kein Übergang von der einen Funktion zur anderen durch Phasenverschiebung möglich. Es gibt also kein Gegenstück zu Gleichung (4.3) für die hyperbolische Variante. In der Definition (siehe Tabelle) unterscheiden sie sich von den normalen Funktionen nur durch Fehlen der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$ und haben dadurch einen ganz anderen Verlauf. Charakteristische Punkte sind $\sinh(0) = 0$ und $\cosh(0) = 1$. In der Seilstatik (Abschnitt 2.11) haben sie eine besondere Bedeutung, da die Seilkurve unter Eigengewicht eine $\cosh(x)$ Funktion (Kettenlinie) ist.

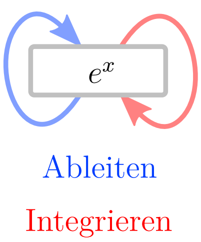
Wie zu sehen ist, gibt es einen engen Zusammenhang aller trigonometrischen Funktionen zur Exponentialfunktion e^x.

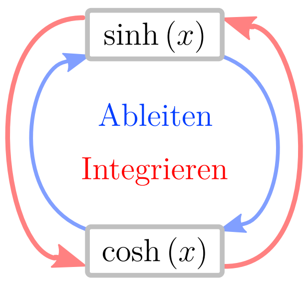
Name	Definition	Umkehrfunktion
Sinus	$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$	Arkussinus: $\arcsin(\sin(x)) = x$
Kosinus	$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$	Arkuskosinus: $\arccos(\cos(x)) = x$
Sinus hyp.	$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$	Area Sinus hyp.: $\operatorname{arsinh}(\sinh(x)) = x$
Kosinus hyp.	$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$	Area Kosinus hyp.: $\operatorname{arcosh}(\cosh(x)) = x$

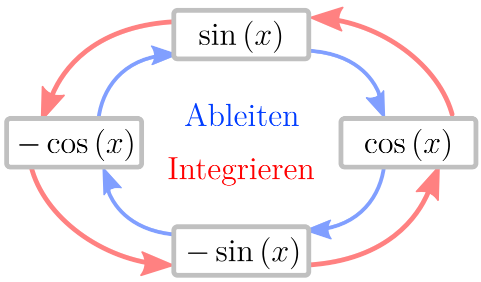
$$\sinh(x) + \cosh(x) = e^x \tag{5.1}$$

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1 \tag{5.2}$$

Aus der Definition der hyperbolischen Funktionen folgen direkt die beiden Zusammenhänge (5.1) und (5.2). Einen ähnlichen und bekannten Zusammenhang gibt es auch für $\sin(x)$ und $\cos(x)$. Dieser und weitere Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus finden sich in Abschnitt 1.5 (Additionstheoreme). Für Integration und Differentiation der Funktionen gilt allgemein:







[1] Sie erhalten ihren Namen daher, dass Sie zur Parametrisierung einer Hyperbel benutzt werden können. Den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ kann man mit $x = \cos(t),\ y = \sin(t)$ beschreiben. Bei der Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$ gilt: $x = \cosh(t),\ y = \sinh(t)$.

1.4

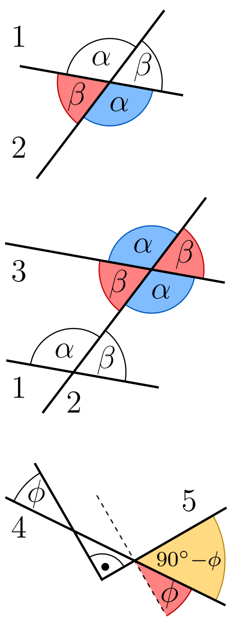
Geometrie an Dreiecken

Zusammenhänge von Längen und Winkeln sind am Dreieck leicht zu untersuchen. Das Hauptinteresse liegt neben den Winkelzusammenhängen an der Ermittlung der Anteile von Vektoren, Längen und Kräften in bestimmte Richtungen (Projektion). Dafür müssen spezielle, *rechtwinklige* Dreiecke betrachtet werden (Zwei Seiten des Dreiecks – die Katheten – stehen senkrecht aufeinander).

a) Winkelerkennung:

Es ist wichtig, Winkel identifizieren und sie „wieder finden“ zu können. Anfangs helfen parallele oder/und orthogonale Linien, später erkennt man vieles von ganz alleine.

ANS

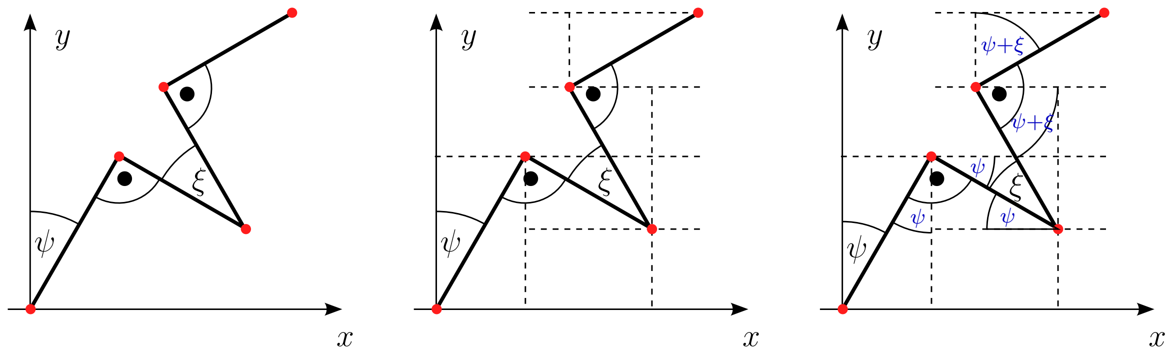


Bei einem Schnitt von zwei Linien sei der Schnittwinkel von Linie 2 zu Linie 1 (gegen den Uhrzeigersinn) α. Dadurch ergibt sich für den Gegenwinkel $\beta = 180° - \alpha$. Aufgrund der (Punkt-)symmetrie müssen die anderen beiden Winkel auch wieder α und β sein (Scheitelwinkel). Schneidet eine dritte Linie die zweite Linie und ist parallel zur ersten, so sind auch hier auf Grund der Symmetrie die Winkel α und β wieder zu finden (Stufen- und Wechselwinkel).

Bei einem Schnitt von Linie 4 mit einem rechtwinkligen Element 5 werden diese Regeln angewendet. Da der Winkel ϕ auch an einer Hilfslinie im zweiten Schnittpunkt angreift, die orthogonal ist, findet sich der anliegende Winkel $90° - \phi$.

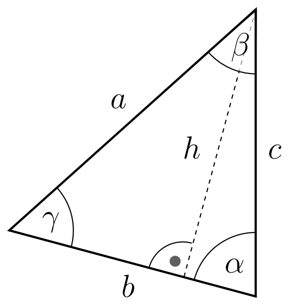
ANS

Mit diesen Winkelbeziehungen lassen sich auch Winkel an komplexeren Gebilden identifizieren. Zuerst zeichnet oder denkt man sich parallele und orthogonale Hilfslinien in der Umgebung der bekannten Winkel. Anschließend können schrittweise alle auftretenden Winkel erkannt werden.



b) Beliebige Dreiecke:

Bei einem beliebigen Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c und den dazugehörigen, gegenüber liegenden Winkeln α, β und γ gelten folgende Beziehungen:



Winkelsumme:

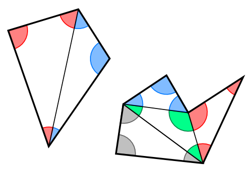
$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \tag{7.1}$$

Sinussatz[2] :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \tag{7.2}$$

Kosinussatz[3]:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \tag{7.3}$$

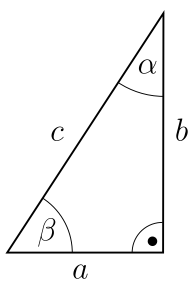


Da sich jeder n-eckige Körper ($n \geq 3$) in $n - 2$ Dreiecke zerlegen lässt, hat ein n-eckiger Körper eine Innenwinkelsumme von $(n - 2) \cdot 180°$ Dabei dürfen nur die vorhandenen Ecken als Eckpunkte der neuen Dreiecke verwendet werden.

c) Rechtwinklige Dreiecke:

Allgemein kann jedes beliebige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke aufgeteilt werden. Am rechtwinkligen Dreieck kann die längste Seite (Hypotenuse) auf die orthogonalen Richtungen (Katheten) projiziert werden. Die Idee wird für Vektorprojektionen in Abschnitt 1.6 genauer untersucht und für dreidimensionale Stabkräfte in Abschnitt 2.9.

Bei einem rechtwinkligen Dreieck gelten folgende Zusammenhänge:

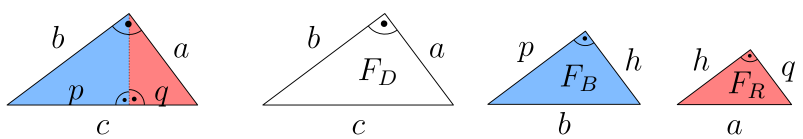


Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{7.4}$$

Projektion der Hypotenuse:

$$\begin{aligned} a &= c\sin(\alpha) = c\cos(\beta) \\ b &= c\sin(\beta) = c\cos(\alpha) \end{aligned} \tag{7.5}$$



Ein kurzer Beweis zum Satz des Pythagoras: Ein Dreieck kann über die Höhe in zwei ähnliche Dreiecke geteilt werden. Da eine Fläche quadratisch zu einer ihrer Längen skaliert, kann man sie mit einer Konstanten[4] k ausdrücken. Es gilt $F_D = c^2k$, $F_B = b^2k$ und $F_R = a^2k$. Da sich die Flächen aufaddieren müssen ($F_D = F_B + F_R$) gilt folglich $c^2 = b^2 + a^2$.

[2] Herleitbar über die Höhen. Beispielsweise gilt am beliebigen Dreieck oben $h = \sin(\gamma)a = \sin(\alpha)c$.

[3] Kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und Projektionen gezeigt werden. Zerlege das beliebige Dreieck über die Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke. Es gilt $c^2 = c^2\cos^2(\beta) + h^2$, $b^2 = b^2\cos^2(\gamma) + h^2$ und $a = b\cos(\gamma) + c\cos(\beta)$. Daraus folgt unmittelbar der Kosinussatz.

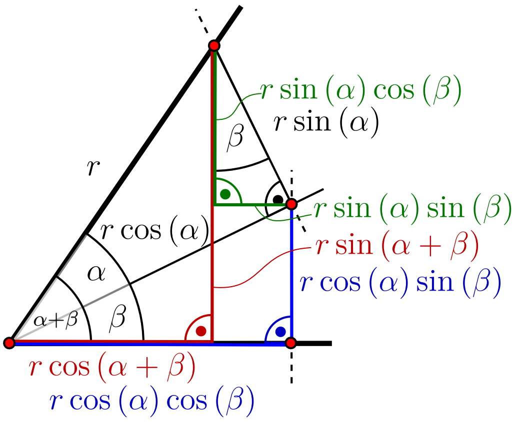
[4] Die Konstante muss für die gleiche Seite in ähnlichen Dreiecken gleich sein.

1.5 Additionstheoreme

Unter Additionstheoreme werden hier Beziehungen der trigonometrischen Funktionen aufgelistet, die auf den ersten Blick nicht unbedingt ersichtlich sind. Sie sind allgemeingültig und deshalb für beliebige Winkel verwendbar. Es folgt eine unvollständige Auflistung wichtiger Zusammenhänge.

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \tag{8.1}$$

Die folgende Aussage kann über die Parametrisierung am Einheitskreis ($x^2 + y^2 = 1$ mit $x = \cos(t)$ und $y = \sin(t)$) oder an rechtwinkligen Dreiecken über den Satz des Pythagoras und der Relation der Katheten zur Hypothenuse (Gleichungen (7.4) und (7.5)) bestätigt werden.



Als nächstes wird eine Strecke r betrachtet, an deren Ende die Winkel α und β anliegen. Zuerst werden die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit r als Hypotenuse beim anliegenden Winkel α bestimmt. Beide Katheten sind gleichzeitig wieder Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke mit dem Winkel β. Zeichnet man diese beiden Dreiecke neben dem großen rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse r über dem Winkel $\alpha+\beta$ ein, so kann das Additionstheorem für eine Winkelsumme abgelesen werden.

Unabhängig von der Herleitungsart sind diese Additionstheoreme für beliebige Winkel α und β gültig.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha) \tag{8.2}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \tag{8.3}$$

Aus den Gleichungen ergeben sich mit $\alpha = \beta$ die Gleichungen (8.4) und (8.5) für den doppelten Winkel.

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \tag{8.4}$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \tag{8.5}$$

Die letzten hier aufgeführten Additionstheoreme zeigen die Abhängigkeit vom halben Winkel und können beispielsweise mit Hilfe von Gleichung (8.1) und (8.5) hergeleitet werden.

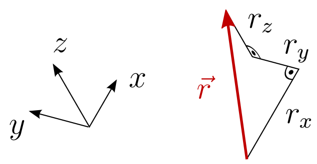
$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2\cos(\alpha)} \tag{8.6}$$
$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos(\alpha)} \tag{8.7}$$

1.6
Vektorrechnung

Annahmen	nur bis zum $\mathbb{R}^3$	Rechtssystem

Vektoren haben einen Betrag und eine Richtung. Sie sind normalerweise mit einem Pfeil über dem Namen gekennzeichnet. Ein Vektor $\vec{r}$ hat den Betrag/die Länge $r = |\vec{r}|$. Auch wenn die Konzepte auf den $\mathbb{R}^n$ erweiterbar sind, wird im Folgenden nur der $\mathbb{R}^3$ betrachtet. Sofern keine weitere Dimensionsangabe vorliegt, werden hier also standardmäßig dreidimensionale Spaltenvektoren in der Form $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \end{pmatrix}^T$ verwendet.

a) Vektoren



Neben den eindimensionalen Werten (einfache Zahlen/Skalare) gibt es auch mehrdimensionale Werte mit Skalare in jeder Dimension: Vektoren. Je nach Ausrichtung spricht man entweder von Zeilenvektoren oder Spaltenvektoren.

Ein Vektor der Dimension 1×3 (Zeilendimension $\times$ Spaltendimension), wie rechts dargestellt, ist ein Spaltenvektor. Er kann über seine Transponierte als Zeilenvektor (Dimension 3×1) geschrieben werden.[5]

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \end{pmatrix}^T \tag{9.1}$$

Vektoren können einfach mit einem Skalar μ multipliziert werden, indem jede Vektorkomponente mit dem Skalar multipliziert wird (Gleichung (9.2)). Die Addition von zwei Vektoren ist nur möglich, wenn beide die gleiche Dimension m und die gleiche Ausrichtung haben (beide Spaltenvektoren mit Dimension $m \times 1$ oder beide Zeilenvektoren mit Dimension $1 \times m$). Dann können die Komponenten in der gleichen Position addiert werden.

$$\mu\vec{r} = \begin{pmatrix} \mu r_x \\ \mu r_y \\ \mu r_z \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

$$\vec{r} + \vec{s} = \begin{pmatrix} r_x + s_x \\ r_y + s_y \\ r_z + s_z \end{pmatrix} \tag{9.3}$$

Das Skalarprodukt definiert eine Multiplikation von zwei Spaltenvektoren $\vec{r}$, $\vec{s}$ gleicher Dimension. Zwischen den Vektoren befindet sich der Winkel ψ. Wenn die Achsen rechtwinklig aufeinander stehen – wie bei kartesischen Koordinaten – dann kann das Skalarprodukt an Hand von Gleichung (9.5) berechnet werden.

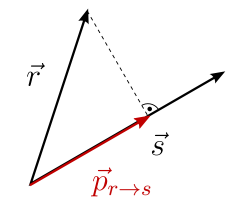
$$< \vec{r}, \vec{s} >= rs\cos(\psi) \tag{9.4}$$

$$\vec{r}^T\vec{s} = r_x s_x + r_y s_y + r_z s_z \tag{9.5}$$

[5]Und umgekehrt natürlich auch.

Dabei ist $\vec{r}^T$ ein Zeilenvektor der Dimension $1 \times m$ und $\vec{s}$ ein Spaltenvektor der Dimension $m \times 1$. Das Ergebnis ist immer ein Skalar.[6]

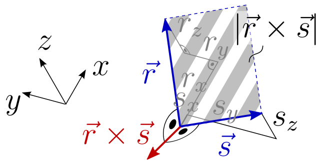
ANS Das Skalarprodukt ist das Produkt der gleichgerichteten Anteile von zwei Vektoren. ***ANS***



$$\vec{p}_{r\to s} = \frac{<\vec{r},\vec{s}>}{|\vec{s}|^2}\vec{s} \qquad (10.1)$$

Mit Hilfe des Skalarprodukts kann auch die Projektion von einem Vektor $\vec{r}$ auf einen anderen Vektor $\vec{s}$ durchgeführt werden. Zuerst wird aus dem Skalarprodukt der gleichgerichtete Anteil von $\vec{r}$ in die Richtung von $\vec{s}$ bestimmt ($\frac{<\vec{r},\vec{s}>}{|\vec{s}|}$). Anschließend wird er mit der Richtung von $\vec{s}$ multipliziert ($\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$), was Gleichung (10.1) ergibt.

Schließlich kann aus zwei Vektoren noch das Kreuzprodukt gebildet werden. Es entsteht ein Vektor, der senkrecht auf der aufgespannten Ebene der beiden Ausgangsvektoren steht. Der Betrag des neuen Vektors entspricht der Fläche des Parallelogramms, das von den ersten beiden Vektoren aufgespannt wird.

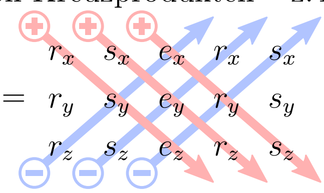


$$\vec{r} \times \vec{s} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_y s_z - r_z s_y \\ -r_x s_z + r_z s_x \\ r_x s_y - r_y s_x \end{pmatrix} \qquad (10.2)$$

Beispiel

Berechnung von Kreuzprodukten – z. B. mit der Regel von Sarrus:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} =$$



$$= r_x s_y e_z + s_x e_y r_z + e_x r_y s_z - r_z s_y e_x - s_z e_y r_x - e_z r_y s_x$$

$$= \begin{pmatrix} r_y s_z - r_z s_y \\ -r_x s_z + r_z s_x \\ r_x s_y - r_y s_x \end{pmatrix}$$

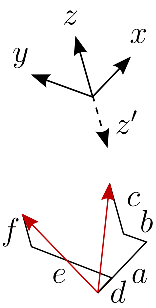
Dazu schreibt man die beiden Ausgangsvektoren, einen Achsenvektor $\begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \end{pmatrix}^T$ und nochmal die Ausgangsvektoren nebeneinander. Anschließend werden erst die Terme diagonal von links oben nach rechts unten positiv miteinander multipliziert und dann dann diagonal von links unten nach rechts oben negativ. Der Achsenvektor zeigt an, zu welcher Koordinate der jeweilige Term gehört.

Beispiel

[6]Die Multiplikation $\vec{s}\vec{r}^T$ ist auch definiert und ergibt eine $m \times m$ Matrix (das dyadische Produkt).

EXT

Abhängig vom Typ des Koordinatensystems (Links- oder Rechtssystem) ändert sich auch das Kreuzprodukt.



In beiden Systemen wird von den gleichen Vektoren das Kreuzprodukt gebildet:

$$\text{RS:} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ -af + cd \\ ae - bd \end{pmatrix}$$

$$\text{LS:} \begin{pmatrix} a \\ b \\ -c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ -f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bf + ce \\ af - cd \\ ae - bd \end{pmatrix}$$

Um Probleme zu vermeiden und Einheitlichkeit zu wahren, werden als Konvention immer nur Rechtssysteme verwendet (siehe Abschnitt 2.1).

EXT

b) Matrizen

Haben die Vektoren sowohl mehrere Zeilen, als auch mehrere Spalten, so spricht man von Matrizen. Auch hier ein kurzer Überblick über verschiedene Rechenmöglichkeiten.

Wie bei den Vektoren können auch bei der Multiplikation von einer Matrix mit einem Skalar die einzelnen Komponenten mit dem Skalar multipliziert werden.

$$\mu \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu a & \mu b & \mu c \\ \mu d & \mu e & \mu f \\ \mu g & \mu h & \mu i \end{bmatrix} \tag{11.1}$$

Die Matrixaddition ist nur für Matrizen der gleichen Dimension $(m \times n)$ definiert. Hierbei werden einfach die Komponenten an der gleichen Stelle in beiden Matrizen addiert.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o & p \\ q & r \\ s & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+o & b+p \\ c+q & d+r \\ e+s & f+t \end{bmatrix} \tag{11.2}$$

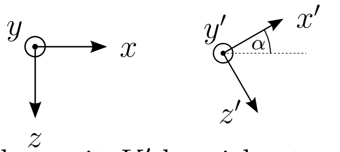
$$G^{m \times n} \cdot U^{n \times p} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} o & p & q \\ r & s & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ao+br & ap+bs & aq+bt \\ co+dr & cp+ds & cq+dt \\ eo+fr & ep+fs & eq+ft \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

Für die Matrixmultiplikation muss die Zeilenzahl n der anmultiplizierten Matrix $U^{n \times p}$ der Spaltenzahl der vorderen Matrix $G^{m \times n}$ entsprechen. Das Ergebnis ist eine Matrix der Dimension $m \times p$. Eine Multiplikation von einem Vektor mit einer Matrix ist ein Spezialfall der Matrixmultiplikation $(G^{m \times n} \cdot v^{n \times 1})$ und ergibt einen Vektor der Dimension $m \times 1$. Auf Grund der Definition kann nur ein Spaltenvektor an eine Matrix multipliziert werden.[7]

[7] Ein Zeilenvektor kann nur an einen Skalar (siehe Vektormultiplikation in Gleichung (9.2)) oder an einen Spaltenvektor (dyadisches Produkt) multipliziert werden.

1.7 Koordinatentransformation

Annahmen	Rechtssystem
Als Transformation werden Verschiebungen und Drehungen bezeichnet. In diesem Abschnitt werden nur Drehungen und Spiegelungen des Koordinatensystems betrachtet. Die dazugehörigen Transformationsmatrizen sind konstant und orthogonal (bzw. die Vektoren der Matrizen orthonormal).	

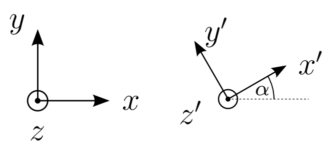


Da das Koordinatensystem oft frei gewählt werden kann, kann es erforderlich sein, Vektoren von ein Koordinatensystem in ein anderes zu transformieren. Dazu wird ein Vektor r'_K aus dem mit K' bezeichnetem System an die Drehmatrix vom gestrichenen ins ungestrischene System multipliziert ($C_{KK'}$). Der Vektor r_K ist das Ergebnis, das mit Koordinaten des K-Systems den gleichen Vektor beschreibt. Mit der allgemeinen Drehmatrix aus Gleichung (12.1) kann jede Verdrehung und Spiegelung dargestellt werden.[8]

$$r_K = C_{KK'}\, r'_K \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x,x') & \cos(x,y') & \cos(x,z') \\ \cos(y,x') & \cos(y,y') & \cos(y,z') \\ \cos(z,x') & \cos(z,y') & \cos(z,z') \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

Statt der Transformation vom ungestrichenen ins gestrichene System kann auch der umgekehrte Fall gesucht sein. Dazu gilt der rechts aufgezeigte Zusammenhang, dass die Transponierte der Rücktransformation entspricht.

$$C_{KK'} = C^T_{K'K} \tag{12.2}$$

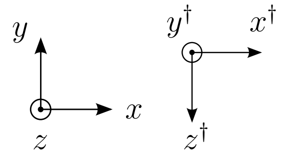


$$C_{KK'} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In allen Fällen, in denen die Drehachse auf einer Koordinatenachse liegt (wie die z-Achse links), kann die Drehmatrix aus Gleichung (12.1) recht einfach bestimmt werden: Auf der Hauptdiagonalen befinden sich positive Kosinusterme und eine Eins in der Koordinate der Drehachse. In der Spalte und Zeile, die kreuzförmig auf die Eins treffen, sind Nullen. Die beiden übrigen Terme sind ein positiver und ein negativer Sinusterm. Wie auch im Bild zu sehen ist, ist ein Winkel zwischen der einen Koordinatenrichtung vor der Drehung und der anderen nach der Drehung größer als 90° (hier: x–y'). In der entsprechenden Position (vgl. Matrix in Gleichung (12.1)) steht der negative Sinusterm.[9]

[8] Es können somit auch Linkssysteme in Rechtssysteme überführt werden und umgekehrt.
[9] Da $\cos(90° + \alpha) = -\sin(\alpha)$ – siehe z. B. Gleichung (8.3).

SYN Drehung gegen den Uhrzeigersinn $\Leftrightarrow$ math. positive Drehung
$\Leftrightarrow$ Drehung nach rechts **SYN**



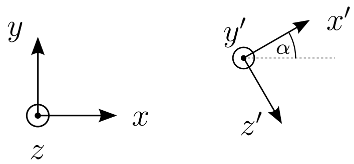
$$C_{KK^\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^\dagger \\ y^\dagger \\ z^\dagger \end{pmatrix}$$

Bei einer Spiegelung an einer Koordinatenachse kann wiederum eine vereinfachte Form von Gleichung (12.1) angewendet werden. Jede der drei neuen Richtungen (†) wird positiv (1) oder negativ (-1) auf eine der Ausgangsrichtungen gelegt. Die restlichen Einträge der Matrix sind Null. Eine Überprüfung kann beispielsweise durch Anmultiplizieren eines Koordinatenvektors $\begin{pmatrix} x^\dagger & y^\dagger & z^\dagger \end{pmatrix}^T$ an die Drehmatrix geschehen, der anschließend deckungsgleich mit $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$ sein muss.

Es ist auch möglich, mehrere Teildrehungen zu beschreiben und die einzelnen Drehmatrizen für eine Gesamtdrehmatrix nacheinander aufzumultiplizieren.

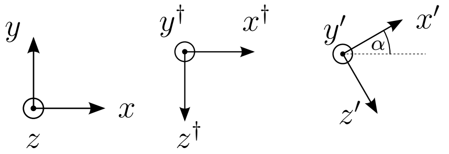
Beispiel



Die Transformationsmatrix vom K- ins K'-System kann mit Hilfe von Gleichung (12.1) bestimmt werden zu:

$$C_{KK'} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos(90°) & \cos(90° - \alpha) \\ \cos(90° - \alpha) & \cos(90°) & \cos(180° - \alpha) \\ \cos(90°) & \cos(0°) & \cos(90°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & 0 & -\cos(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Es handelt sich hier nicht (nur) um eine reine Drehung. Aber jede Transformationsmatrix kann durch eine Spiegelung mit anschließender Drehung beschrieben werden.



Dabei wird zuerst die Spiegelung ins $K^\dagger$-System betrachtet, dann die Drehung vom $K^\dagger$-System ins K'-System.

$$C_{KK^\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_{K^\dagger K'} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$C_{KK'} = C_{KK^\dagger} C_{K^\dagger K'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & 0 & -\cos(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Beispiel

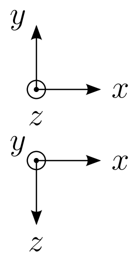
2 Statik

Dieses Kapitel befasst sich mit verschiedenen Bereichen der Statik. Zuerst werden die Konventionen der Statik und die grundlegenden Belastungsarten vorgestellt. Es folgt die Betrachtung von Teilsystemen und die dazu nötigen Gleichgewichtsbedingungen, bevor das Thema Schwerpunkte besprochen wird. Die Abschnitte Schnittverläufe und Fachwerke befassen sich mit inneren Kräften am Balken oder in einem System. Abschließend folgt ein Überblick von reibungsbehafteten Systemen und ein Einblick in die Seilstatik.

2.1
Konventionen

Annahmen	starres System	statisch bestimmt
Es werden nur Rechtssysteme verwendet. Bei einem Schnitt sind an beiden Schnittufern gleichgroße, entgegengesetzte Belastungen anzunehmen.		

a) Rechtssystem



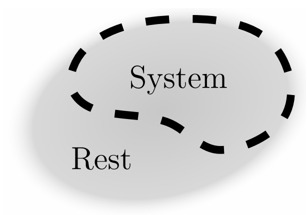
Für die Berechnungen werden (hier) nur Rechtssysteme (siehe Abschnitt 1.2) verwendet. Der Grund liegt in der Definition des Kreuzproduktes (siehe Abschnitt 1.6), das für Momentengleichgewichte direkt oder indirekt benutzt wird. Dadurch sind die Ergebnisse unabhängig von der Wahl der Ausrichtung des Rechtssystems mit anderen Rechnungen in einem Rechtssystem vergleichbar und übertragbar.

b) Masselos, reibungsfrei

Immer wieder werden in der Statik einzelne Bauteile als masselos angesehen, da man sich für spezielle Zusammenhänge unter idealisierten Bedingungen interessiert. In der Regel geht aus der Aufgabenstellung eindeutig hervor, ob/welche Bauteile massebehaftet sind.

Das Gleiche gilt für Reibung (siehe Abschnitt 2.10). Wenn keine Reibkoeffizienten zwischen zwei Berührungspunkten/Flächen angegeben (oder gesucht) sind, werden die Auflageflächen als reibungsfrei angenommen.

c) Entgegengesetzte Schnittufer



Sowohl beim Freischneiden (siehe Abschnitt 2.4), als auch beim allgemeinen Schneiden wird ein System aufgeteilt: Der (heraus-)geschnittene Teil und der „Rest“. An jedem Schnitt entstehen zwei Schnittufer (positives und negatives) mit entgegengesetzten Belastungen.[10] Es wird angenommen, dass die Größen am positiven Schnittufer in positive Koordinatenrichtung zeigen.

Im Folgenden werden beim Freischneiden alle am freigeschnittenen System angreifenden Belastungen (v. a. Lagerreaktionen, siehe Abschnitt 2.5) positiv angenommen. Das ist zwar nicht notwendig, hat aber den Effekt, dass alle Schnittgrößen im freigeschnittenen System in positive Koordinatenrichtungen zeigen.

Werden andere Richtungen gewählt, so haben die Belastungen zwar noch den gleichen Betrag, aber möglicherweise ein anderes Vorzeichen (Richtung). Betrachtet man die Belastungen entsprechend Ihrer Belastungsrichtung, so müssen alle Ergebnisse gleich sein.

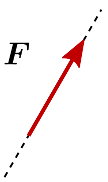
[10] Da die Größen im ungeschnittenen System nicht vorkommen ist es völlig in Ordnung einfach zwei gleich große, entgegengesetzte Belastungen anzunehmen und sie dem jeweiligen Schnittufer zuzuweisen.

2.2
Belastungsarten

Die grundlegenden Belastungsarten sind Kräfte, Momente und Streckenlasten.

a) Kräfte

Kräfte, als zentrale Belastungsart, werden in Newton gemessen [$1\,\mathrm{N} = 1\frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}^2}$]. Sie haben einen Betrag und eine Richtung und sind deshalb Vektoren.[11] Anschaulich kann man sich eine Kraft $\boldsymbol{F}$ als eine Masse m mit einer Beschleunigung a vorstellen ($\boldsymbol{F} = ma$, zweites Newtonsches Gesetz). Alle massebehafteten Teile erfahren somit eine Gewichtskraft $\boldsymbol{mg}$ mit Erdbeschleunigung $g \approx 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.



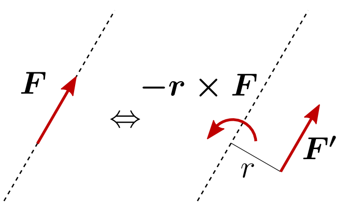
Ein Kraftvektor kann beliebig auf seiner Wirkungslinie verschoben werden, aber Verschiebungen senkrecht zur Wirkungslinie erzeugen ein Moment. Schneiden sich die Wirkungslinien von (zwei) Kräften in einem Punkt, so können die Kräfte einfach addiert werden. Falls sich die Wirkungslinien nicht (alle) schneiden, so können die Kräfte zwar auch addiert werden, aber es entstehen wiederum Momente, die berücksichtigt werden müssen.

Allgemein werden Kräfte, die auf allgemeine physikalische Gesetze zurückgehen (Gewichtskraft, Federkraft und Reibkraft) als eingeprägte Kräfte bezeichnet. Eine andere Art der Unterteilung sind konservative Kräfte (keine Dissipation d. h. Energieverluste durch Wärme etc.) und nichtkonservative Kräfte (wie Reibkräfte).

b) Momente

Eine weitere Belastungsart sind Momente (bzw. Drehmomente), die eine rotatorische Belastung am System beschreiben und in [Nm] angegeben werden. Sie können als freie Momente auftreten oder durch dezentral angreifende Kräfte entstehen (Hebelarm × Kraft).

$$\boxed{\boldsymbol{M} = r \times \boldsymbol{F} \qquad (16.1)}$$

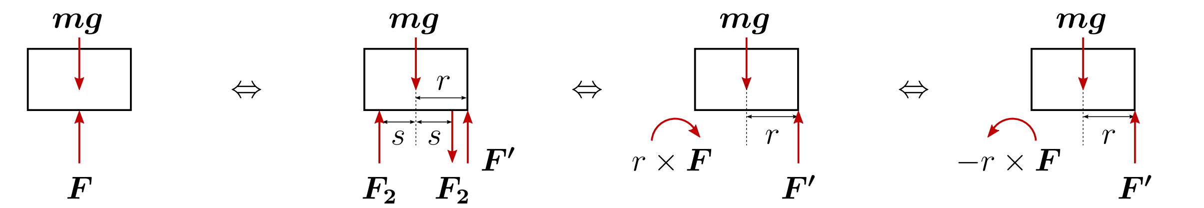


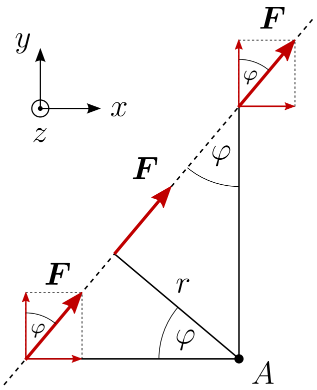
Kräfte können ohne Einschränkung entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden. Möchte man eine Kraft senkrecht zu ihrer Wirkungslinie verschieben, so müssen Maßnahmen getroffen werden, dass sich das System nicht verdreht.

Da die Kraft nach der Verschiebung immer noch den gleichen Betrag und die gleiche Richtung hat ($\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F'}$), kann das entstehende Ungleichgewicht nicht durch eine weitere Kraft behoben werden.[12] Es wird eine Gegenverdrehung $-r \times \boldsymbol{F}$ benötigt, damit das System im Gleichgewicht bleibt (siehe Gleichgewichtsbedingungen, Abschnitt 2.3).

[11] Hier wird auf die typische Kennzeichnung eines Vektors mit Pfeil ($\vec{\boldsymbol{F}}$) verzichtet, da die Richtung immer aus dem Kontext hervorgeht. Als Angabe und Rechengröße wird der Betrag verwendet ($\boldsymbol{F} = |\vec{\boldsymbol{F}}|$).
[12] Eine einzelne weitere Kraft würde das Kräftegleichgewicht zerstören.

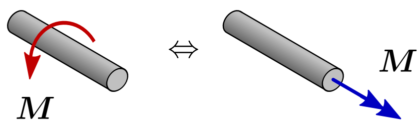
Diese kann über ein freies Moment oder durch zwei gleich große, entgegengesetzte Kräfte erzeugt werden. Dabei sind Abstand s und Betrag $\boldsymbol{F_2}$ der Kräfte so zu wählen, dass das entstehende Moment der benötigten Gegenverdrehung entspricht ($\boldsymbol{M} = -2s\boldsymbol{F_2} = -r\boldsymbol{F}$).





Das Kreuzprodukt in der Definition des Moments sorgt dafür, dass automatisch nur die senkrechten Anteile zwischen Hebelarm und Kraft berücksichtigt werden. Daher ist es mit der Formel egal, wo sich die Kraft auf ihrer Wirkungslinie befindet, da sie immer das gleiche Moment erzeugt (z. B. ist links das Moment um A für jeden Startpunkt des Kraftvektors $\boldsymbol{M} = -r\boldsymbol{F}$). Rechnet man ohne das Kreuzprodukt, so darf nur der rechtwinklige Anteil der Kraft zum Hebelarm verwendet werden. Außerdem ist auf das richtige Vorzeichen zu achten (Rechte-Hand-Regel).

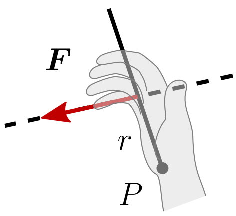
SYN



Ein gebogener Vektor stellt symbolisch die Drehung eines Momentes in diese Drehrichtung dar. Gleichbedeutend damit ist ein Vektor mit Doppelspitze, wobei hier die Pfeilrichtung die Drehachse darstellt, um die ein positives Moment in positive Richtung dreht.

SYN

ANS

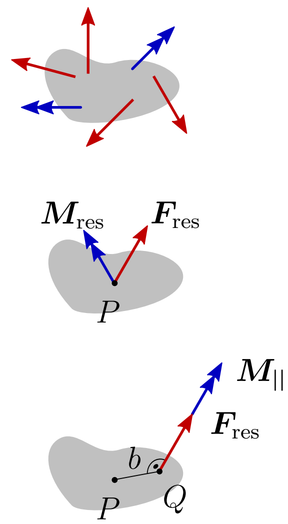


Rechte-Hand-Regel für Momente zur Überprüfung, ob eine Kraft ein positives Moment im Betrachtungspunkt erzeugt. Der Daumen zeigt nach oben, der Handballen ist im Betrachtungspunkt P und die Handfläche geht entlang des Hebelarms r zur (Wirkungslinie der) Kraft $\boldsymbol{F}$. Zeigen die gekrümmten Finger in Richtung der Kraft, so ist das Moment positiv. Würde man sich die Finger umknicken/brechen müssen, ist das Moment negativ.

ANS

Momente können wie Kräfte addiert werden. Mit Hilfe von Momenten ist es schließlich möglich, alle Belastungen in zweidimensionalen Systemen durch genau eine Kraft oder ein Moment und im Dreidimensionalen durch genau eine Kraft und ein Moment auszudrücken.[13]

[13] Natürlich kann in Spezialfällen auch eine Beschreibung mit nur einer Kraft oder nur einem Moment möglich sein, wenn die jeweils andere Belastung Null ist/wird.



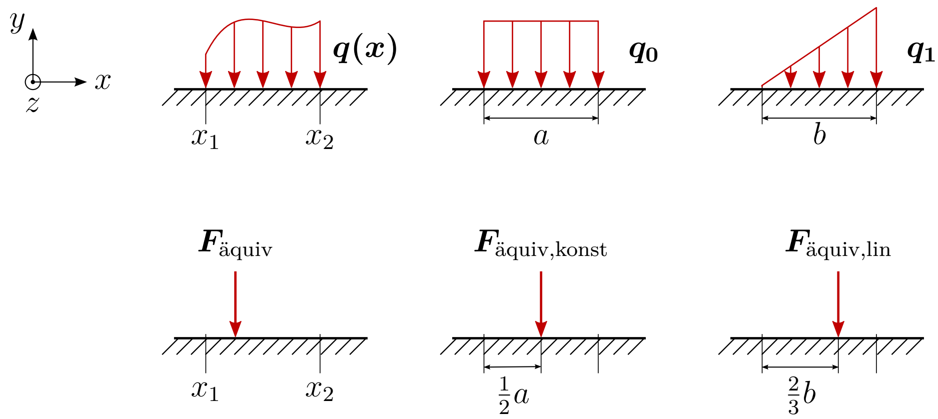
Eine spezielle Schreibweise von der resultierenden Kraft und dem resultierenden Moment ist die Kraftschraube oder Dyname. Hier werden die Anteile des Momentes, die nicht parallel zur Richtung der Kraft sind, durch eine Verschiebung der Kraft neutralisiert. Das dadurch entstehende Moment kann alle Momentenanteile ausgleichen, außer die zur Kraft parallelen.[14] Dadurch bleibt die Kraft $\boldsymbol{F}_{\text{res}}$ erhalten, die um b senkrecht zu ihrer Richtung verschoben wird, und ein zur Kraft paralleles Moment $\boldsymbol{M}_{||}$.

$$b = \frac{\boldsymbol{F}_{\text{res}} \times \boldsymbol{M}_{\text{res}}}{|\boldsymbol{F}_{\text{res}}|^2} \tag{18.1}$$

$$\boldsymbol{M}_{||} = \frac{\boldsymbol{F}_{\text{res}}\boldsymbol{M}_{\text{res}}}{|\boldsymbol{F}_{\text{res}}|^2}\boldsymbol{F}_{\text{res}} \tag{18.2}$$

c) Streckenlasten

Eine weitere Gruppe von Belastungen sind Streckenlasten. Wie der Name schon andeutet, handelt es sich um eine Kraft pro Strecke $[\frac{\text{N}}{\text{m}}]$. Abhängig von Form der Streckenlast und Länge der Strecke, auf der sie wirkt, kann Richtung, Betrag und Angriffspunkt einer äquivalenten Ersatzkraft bestimmt werden.



Für die Bestimmung einer äquivalenten Ersatzkraft wird im allgemeinen die Streckenlast über die Strecke, auf der sie wirkt, integriert. Zwei einfache Spezialfälle von Streckenlasten sind die konstante Streckenlast und die lineare Streckenlast. Die äquivalente Ersatzkraft der konstanten Streckenlast hat den Betrag $\boldsymbol{F}_{\text{äquiv,konst}} = \boldsymbol{q_0}a$ und wirkt in der Mitte der Streckenlast. Bei der linearen Ersatzkraft ist der Betrag $\boldsymbol{F}_{\text{äquvi,lin}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{q_1}b$. Sie greift nach $\frac{2}{3}b$ an.

$$\boldsymbol{F}_{\text{äquiv}} = \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{q(x)}\,\mathrm{d}x \tag{18.3}$$

Das Finden des Angriffspunktes ähnelt der Bestimmung eines Schwerpunktes (siehe Abschnitt 2.7), wenn man sich den Verlauf der Streckenlast als Fläche vorstellt. Gerade bei Streckenlasten höherer Ordnung können Parallelen in der Berechnung des Angriffspunktes genutzt werden.

[14] Eine Kraft kann kein Moment in die gleiche Richtung erzeugen. Siehe auch Abschnitt 2.3.

2.3 Gleichgewichtsbedingungen

Annahmen	statisch bestimmt

In statisch bestimmten Systemen können unbekannte Kräfte (wie Lagerreaktionen) mit Hilfe von Gleichgewichtsbedingungen (GGB) bestimmt werden. Im Zweidimensionalen gibt es drei linear unabhängige GGB, im Dreidimensionalen sechs.

a) Zweidimensional

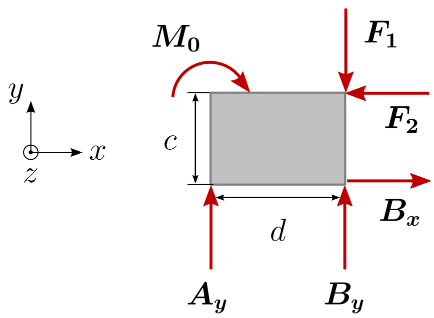
Im Zweidimensionalen gibt es zwei linear unabhängige Kraftrichtungen (x- und y-Richtung) sowie ein Moment. Dadurch entstehen drei linear unabhängige GGB, die zur Bestimmung von unbekannten Belastungen verwendet werden können.

$$\begin{aligned} \sum \boldsymbol{F_x} &= 0 \\ \sum \boldsymbol{F_y} &= 0 \\ \sum \boldsymbol{M_z} &= 0 \end{aligned} \tag{19.1}$$

Je nach Koordinatensystem können die Koordinatenrichtungen abweichen. Wichtig ist nur, dass beide Kräftegleichgewichte in der Zeichenebene liegen und die Richtung des Momentengleichgewichts senkrecht dazu ist.

Beispiel

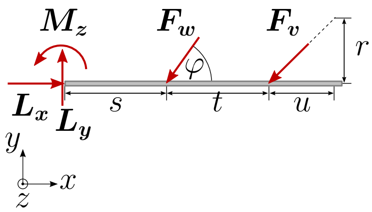
Für das linke System seien $\boldsymbol{M_0}$, $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$ und die Längen c, d gegeben. Dann können mit den Gleichgewichtsbedingungen die drei noch unbekannten Kräfte $\boldsymbol{A_y}$, $\boldsymbol{B_x}$ und $\boldsymbol{B_y}$ eindeutig berechnet werden.



$$\begin{aligned} \sum \boldsymbol{F_x} &: \ 0 = \boldsymbol{B_x} - \boldsymbol{F_2} \quad \Rightarrow \boldsymbol{B_x} = \boldsymbol{F_2} \\ \sum \boldsymbol{F_y} &: \ 0 = \boldsymbol{A_y} + \boldsymbol{B_y} - \boldsymbol{F_1} \\ &\Rightarrow \boldsymbol{B_y} = \boldsymbol{F_1} - \boldsymbol{A_y} \\ \sum \boldsymbol{M_z^B} &: \ 0 = -d\boldsymbol{A_y} + c\boldsymbol{F_2} - \boldsymbol{M_0} \\ &\Rightarrow \boldsymbol{A_y} = \frac{c}{d}\boldsymbol{F_2} - \frac{\boldsymbol{M_0}}{d} \\ &\Rightarrow \boldsymbol{B_y} = \boldsymbol{F_1} - \frac{c}{d}\boldsymbol{F_2} - \frac{\boldsymbol{M_0}}{d} \end{aligned}$$

Beispiel

Kräfte, die Anteile in beide Koordinatenrichtungen haben, müssen entsprechend aufgeteilt werden. Entweder ist der Angriffswinkel gegeben, oder das Verhältnis lässt sich aus der Geometrie bestimmen. Das gilt auch im Dreidimensionalen und ist für Fachwerke in Abschnitt 2.9 aufgezeigt.



$$\begin{aligned} \sum \boldsymbol{F_x} &: \ 0 = \boldsymbol{L_x} - \boldsymbol{F_w}\cos(\varphi) - \tfrac{u}{\sqrt{u^2+r^2}}\boldsymbol{F_v} \\ \sum \boldsymbol{F_y} &: \ 0 = \boldsymbol{L_y} - \boldsymbol{F_w}\sin(\varphi) - \tfrac{r}{\sqrt{u^2+r^2}}\boldsymbol{F_v} \\ \sum \boldsymbol{M_z^L} &: \ 0 = \boldsymbol{M_z} - s\boldsymbol{F_w}\sin(\varphi) - \tfrac{(s+t)r}{\sqrt{u^2+r^2}}\boldsymbol{F_v} \end{aligned}$$

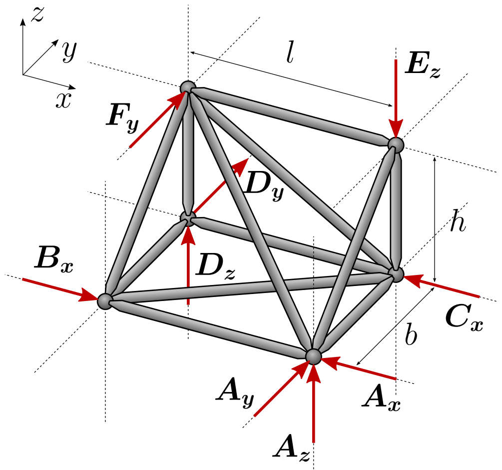
b) Dreidimensional

Im dreidimensionalen Fall gibt es drei unabhängige Kraftrichtungen, drei unabhängige Momentenrichtungen und somit sechs Gleichgewichtsbedingungen. Bei den GGB der Kräfte ist das Vorgehen wie im Zweidimensionalen. Die GGB der Momente lassen sich auch wie folgt schreiben:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \sum \boldsymbol{M}_x^A \\ \sum \boldsymbol{M}_y^A \\ \sum \boldsymbol{M}_z^A \end{pmatrix} = \sum_i \begin{pmatrix} r_{i,x} \\ r_{i,y} \\ r_{i,z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_{i,x} \\ \boldsymbol{F}_{i,y} \\ \boldsymbol{F}_{i,z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{i,x} \\ \boldsymbol{M}_{i,y} \\ \boldsymbol{M}_{i,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (20.1)}$$

Der Vorteil der vektoriellen Betrachtung im Dreidimensionalen mit Gleichung (20.1) liegt darin, dass man von einem festen Betrachtungspunkt aus einfach nur alle Hebelarme mit allen angreifenden Kräften und die freien Momente in die Gleichung einsetzen muss.[15]

Beispiel



Im links dargestellten System soll für jede Koordinatenrichtung das Moment um Punkt A berechnet werden. Alle dargestellten Kräfte und Längen sind als gegeben anzunehmen.

$$\begin{pmatrix} \sum \boldsymbol{M}_x^A \\ \sum \boldsymbol{M}_y^A \\ \sum \boldsymbol{M}_z^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\boldsymbol{D_z} - b\boldsymbol{E_z} - h\boldsymbol{F_y} \\ l\boldsymbol{D_z} \\ b\boldsymbol{C_x} - l\boldsymbol{D_y} - l\boldsymbol{F_y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{B_x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\boldsymbol{C_x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -l \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{D_y} \\ \boldsymbol{D_z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\boldsymbol{E_z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -l \\ b \\ h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{F_y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit der vektoriellen Berechnung ist man immer auf der sicheren Seite. Die komponentenweise Berechnung liefert dafür direkt das Ergebnis, sofern man alles richtig „sieht“ (Überprüfung: Rechte-Hand-Regel für Momente).

Beispiel

ANS Kräfte können kein Moment in eine Koordinatenrichtung erzeugen, wenn sie in die gleiche Koordinatenrichtung zeigen oder in der Ebene liegen, die von ihrem Hebelarm und der Koordinatenrichtung aufgespannt wird. ***ANS***

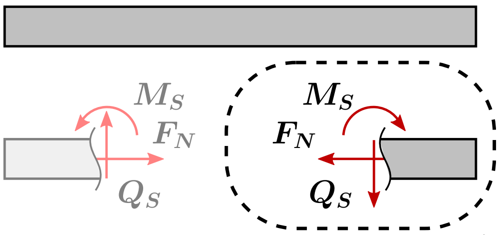
Im oberen Beispiel leisten $\boldsymbol{D_y}$ und $\boldsymbol{F_y}$ keinen Beitrag zum Moment $\boldsymbol{M}_y^A$, da sie in die gleiche Richtung zeigen. Die Kräfte $\boldsymbol{B_x}$, $\boldsymbol{C_x}$ und $\boldsymbol{E_z}$ leisten keinen Beitrag zum Moment $\boldsymbol{M}_y^A$, da sie jeweils in der Ebene liegen, die von ihrem Hebelarm (senkrechter Abstand) zu A und der y-Richtung aufgespannt wird.

[15] Zusätzliche Gedanken über Vorzeichen des resultierenden Moments oder senkrechte Anteile, wie bei der komponentenweisen Betrachtung, sind nicht nötig.

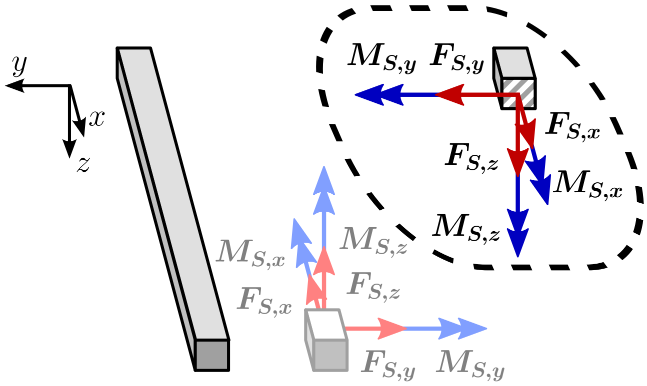
2.4
Freischneiden

Freischneiden eines (Teil-)Systems heißt, an Systemgrenzen Belastungen anzunehmen, um den Zustand des Systems nicht zu verändern. Im Allgemeinen sind zwei Kräfte und ein Moment im Zweidimensionalen bzw. drei Kräfte und drei Momente im Dreidimensionalen nötig.

a) Allgemeines



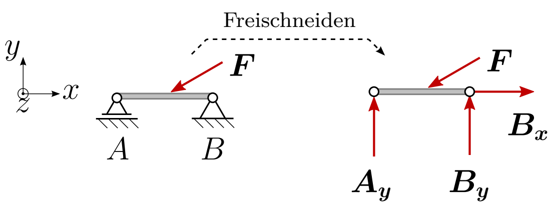
Prinzipiell kann jedes Teilsystem von Interesse herausgeschnitten werden. Dabei ist wichtig, dass das Teilsystem komplett und nicht nur teilweise freigeschnitten werden muss. Außerdem müssen alle möglichen (nötigen) Belastungen auf beiden Seiten des Schnittes angenommen werden (siehe Abschnitt 2.1). Im zweidimensionalen Fall stehen drei GGB zur Verfügung um genau drei Belastungen pro (Teil-)System zu bestimmen.



Im Dreidimensionalen sind im allgemeinen drei Kräfte und drei Momente an jedem Schnitt bzw. Schnittufer anzunehmen. Es gibt jedoch spezielle Bauteile (für 2D und 3D), die nur spezielle Belastungen übertragen können. Einige davon sollen im Folgenden vorgestellt werden.

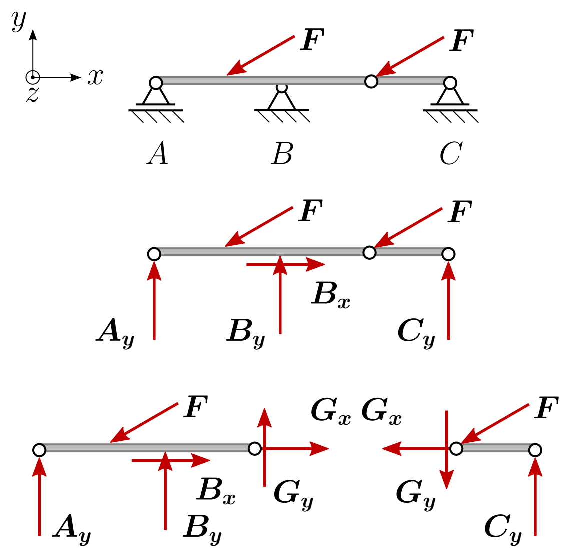
ANS Ein Schnitt an beliebiger Stelle erfordert 3 Belastungen im Zweidimensionalen bzw. 6 Belastungen im Dreidimensionalen. Weniger Belastungen können nur beim Schnitt in speziellen Bauteilen angenommen werden. ***ANS***

b) Lager



Oft ist es wichtig, die Lagerreaktionen eines Systems mit gegebenen Belastungen zu bestimmen. Hier wird direkt im Lager geschnitten und je nach Lagertyp sind verschiedene Belastungen anzunehmen. Links ist ein Loslager (wird mit einer Kraft ersetzt) und ein Festlager (wird mit zwei Kräften ersetzt) zu sehen. Mehr zu den Belastungen in verschiedenen Lagern findet sich in Abschnitt 2.5.

c) Gelenke



Gelenke sind Bauteile, bei denen nicht alle Kräfte/Momente übertragen werden. Deshalb ist es in der Statik wichtig, in allen Gelenken zu schneiden, um die tatsächlichen Belastungen am System (richtig) zu erfassen.[16] Eine Auflistung von Gelenken findet sich ebenfalls in Abschnitt 2.5.

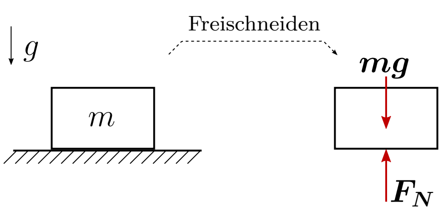
Im Beispiel links ist zu sehen, dass wir beim Freischneiden der Lager vier unbekannte Lagerreaktionen zu berechnen hätten. Wir haben aber nur drei GGB und können somit nur drei Unbekannte pro (Teil-)System bestimmen.

Jetzt wissen wir aber, dass das verbaute Gelenk gar kein Moment übertragen kann. Durch einen Schnitt im Gelenk können wir uns das zu Nutze machen und es entstehen zwei Teilsysteme mit jeweils drei Unbekannten.[17] Das System ist also dank Gelenk auch mit vier unbekannten Größen eindeutig lösbar.

ANS Wirkt eine Kraft direkt am Gelenk, ist sie einer Seite/Schnittufer zuzuordnen. ***ANS***

ANS Wenn ein System in der Statik zu wenig GGB für alle Unbekannten hat, dann sollte das System an den Gelenken in Teilsysteme geschnitten werden. ***ANS***

d) Auflageflächen



Bei Auflageflächen gibt es zwei Fälle zu unterscheiden: mit und ohne Reibung (siehe Abschnitt 2.10). Im reibungsfreien Fall wirkt eine Normalkraft senkrecht zur Auflagefläche. Die Größe und der Angriffsort kann i. d. R. über die Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden.[18] Im reibungsbehafteten Fall wirkt neben der Normalkraft eine Reibkraft entlang der Auflagefläche.

[16] Eine Ausnahme bilden hier Konstruktionen wie abbaubare Fachwerke (Abschnitt 2.9).

[17] Die Unbekannten im ersten System sind A_y, B_x und B_y, im zweiten System C_x, G_x und G_y.

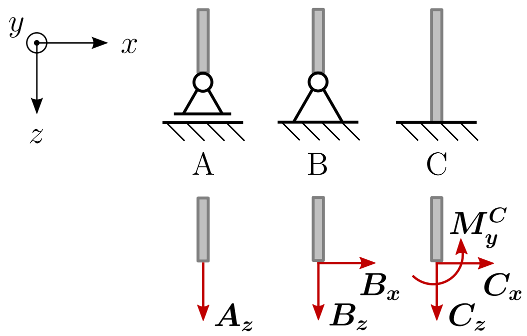
[18] Wenn nur die Gewichtskraft des Körpers wirkt, ist die Normalkraft auf der gleichen Wirkungslinie (Momentengleichgewicht bzw. zentrales Kräftesystem).

2.5
Lager- und Gelenktypen

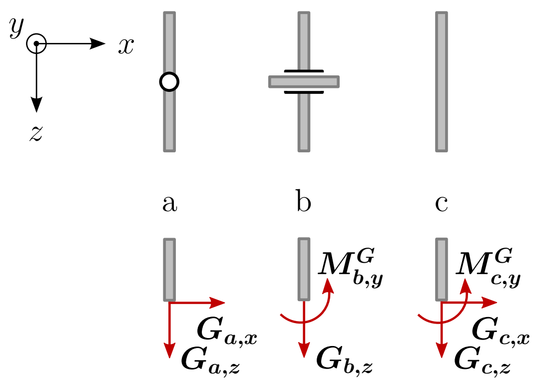
Eine Lagerung beschreibt die Verbindung des Systems zu raumfesten Kanten bzw. Ebenen. Deshalb ist eine der Lagerreaktionen immer eine Kraft orthogonal zur Kante/Ebene. Wenn sich Gelenke im System befinden, dann werden bestimmte Kräfte/Momente nicht übertragen und i. d. R. muss das System im Gelenk zur Bestimmung der Lagerreaktionen geschnitten werden.

Um Belastungen und Beanspruchungen an/in einem System zu berechnen, muss es zuerst freigeschnitten werden. Meistens sind Lager die Verbindungsstellen zur Umgebung, die durch entsprechende Lagerreaktionen ersetzt werden können. Wie beim normalen Freischneiden werden Kräfte und Momente angenommen, um bestimmte Bewegungen oder Verdrehungen zu verhindern.

a) Im Zweidimensionalen



Links sind die drei typischen Lagerungsarten im Zweidimensionalen dargestellt. Ganz links ist ein Loslager zu sehen (A). Um das System im Gleichgewicht zu halten, ist nur eine Lagerreaktion (Kraft senkrecht zur Ebene) nötig, da es sich parallel zur Ebene verschieben und beliebig verdrehen darf. Ein Festlager (B) hält einen Punkt des Systems fest, lässt aber noch eine Drehung des Systems um den Punkt zu (zwei Lagerkräfte, kein Moment). Bei einer festen Einspannung (C) wird das ganze System gehalten und es sind zwei Kräfte und ein Moment nötig.

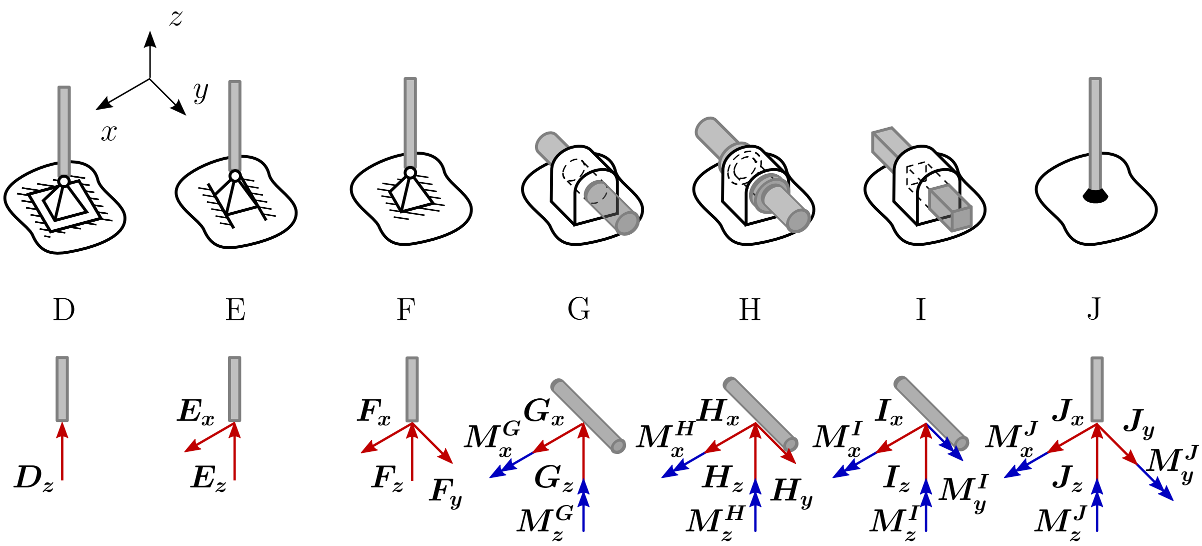


In einem System können die Elemente unterschiedlich miteinander verbunden sein. Die beiden häufigsten Gelenktypen im Zweidimensionalen sind das Drehgelenk (a)[19], das kein Moment übertragen kann, und die Schiebehülse (b). Eine Schiebehülse lässt Bewegung in eine Richtung zu, verhindert aber die Bewegung in die senkrechte Richtung und Verdrehungen. Deshalb sind eine Kraft und ein Moment nötig. Im Vergleich dazu sind bei einer festen Verbindung bzw. einem normalen Schnitt (c) zwei Kräfte und ein Moment anzunehmen.

[19]Oft im Zweidimensionalen auch nur als Gelenk bezeichnet.

b) Im Dreidimensionalen

Hier gibt es zwar mehr Lagerungsmöglichkeiten, aber wie im Zweidimensionalen ergeben sich die nötigen Lagerreaktionen an Hand der nicht möglichen Bewegungsarten. Im Folgenden sind sieben oft verwendete Lagerungsarten dargestellt:



Dabei sind

D: Schwebendes Loslager (eine Lagerreaktion)

E: Geführtes Loslager (zwei Lagerreaktionen)

F: Festlager (drei Lagerreaktionen)

G: Schiebehülse: (vier Lagerreaktionen)

H: Fixierte Schiebehülse/Scharnier (fünf Lagerreaktionen)

I: Schiebehülse mit Nut (fünf Lagerreaktionen)

J: Feste Einspannung (sechs Lagerreaktionen)

Wie im Zweidimensionalen sind auch hier verschiedene Gelenktypen möglich. Dabei repräsentieren die Lager selbst auch Gelenktypen, wenn statt der Verankerung mit der Umgebung einfach eine Befestigung an einem anderen System/anderen Stab angenommen wird.

2.6
Bestimmtheit

Für statische Bestimmtheit werden die Freiheitsgrade des Systems (v. a. Lagerreaktionen und Gelenke) mit den verfügbaren Gleichgewichtsbedingungen verglichen. Bei der kinematischen Bestimmtheit müssen – je nach statischer Bestimmtheit – zusätzlich die Wirkungslinien der Lagerreaktionen betrachtet werden.

a) Statische Bestimmtheit

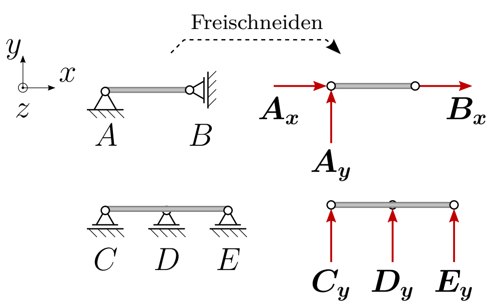
Wenn alle Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden können, dann heißt das System statisch bestimmt. Da in einem zweidimensionalen System drei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen (zwei Kräfte- und ein Momentengleichgewicht), können pro System drei Lagerreaktionen bestimmt werden. Befindet sich ein Gelenk im System, so kann das Gesamtsystem durch einen Schnitt im Gelenk in zwei Teilsysteme (mit je drei GGB) aufgeteilt werden, es kommen aber nur zwei Schnittreaktionen hinzu. Dadurch hat man eine Gleichgewichtsbedingung mehr zur Verfügung. Mehrere Gelenke sorgen entsprechend für „zusätzliche“ Gleichgewichtsbedingungen.

Die gleichen Prinzipien gelten auch für den dreidimensionalen Fall. Hier können pro System mit den sechs Gleichgewichtsbedingungen (drei Kräfte- und drei Momentengleichgewichte) sechs unbekannte Lagerreaktionen bestimmt werden. Auch hier können verschiedene Gelenke/Verbindungsstücke die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen erhöhen.

SYN	mehr GGB als Lagerreaktionen	⇔	statisch unterbestimmt	***SYN***
	mehr Lagerreaktionen als GGB	⇔	statisch überbestimmt	

b) Kinematische Bestimmtheit

Ausgehend von der statischen Bestimmtheit kann über die kinematische Bestimmtheit folgendes gesagt werden: Alle statisch überbestimmten Systeme sind kinematisch bestimmt. Statisch unterbestimmte Systeme sind ebenfalls kinematisch unterbestimmt. Nur bei statisch bestimmten Systemen müssen noch zusätzlich die Wirkungslinien der Lagerreaktionen untersucht werden. Im Zweidimensionalen gilt:



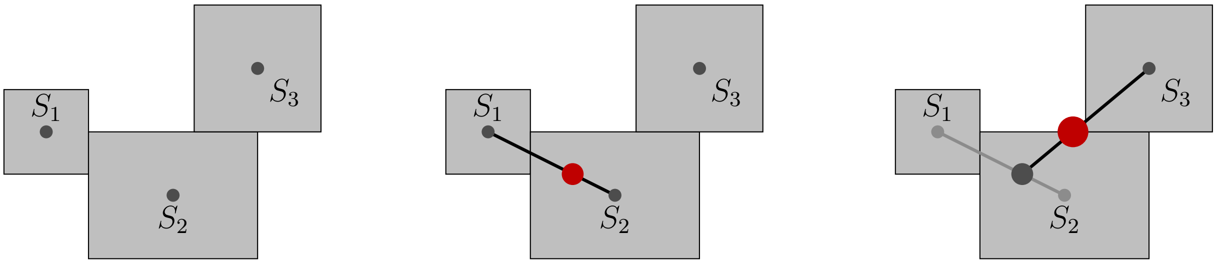
Statisch bestimmte Systeme sind kinematisch unterbestimmt, wenn entweder die Wirkungslinien aller Lagerreaktionen einen gemeinsamen Punkt schneiden (links: in Lager A), oder die Wirkungslinien aller Lagerreaktionen parallel sind (links: unteres System). Alle anderen statisch bestimmten Systeme sind auch kinematisch bestimmt.

2.7
Schwerpunkte

Annahmen	starres System statisch bestimmt	homogene Verteilung

Die Gewichtskraft greift im Schwerpunkt an. Mehrere Teilkörper können als Gesamtsystem betrachtet werden, wenn die gewichtete Summe der einzelnen Gewichtskräfte im Schwerpunkt angenommen wird. Neben dem Massenschwerpunkt können Linien-, Flächen- und Volumenschwerpunkte berechnet werden (jeder Schwerpunkt einer homogenen Verteilung). Bei symmetrischen Körpern liegt der Schwerpunkt auf der Symmetrieachse.

a) Zeichnerische Bestimmung des Schwerpunktes:



Zeichnerisch kann der Gesamtschwerpunkt eines Systems mit n Elementen in n Schritten ermittelt werden. Im ersten Schritt werden alle Einzelschwerpunkte ermittelt. Jeder weitere Schritt besteht daraus, zwei Schwerpunkte mit einer Linie zu verbinden und durch einen neuen zu ersetzen bis nur noch der Gesamtschwerpunkt übrig bleibt. Die Lage des gemeinsamen Schwerpunktes kann durch die Teilverhältnisse (Massen/ Volumen/ Flächen/ Linien) bestimmt werden.

ANS Gesucht ist der Schwerpunkt von zwei Teilkörpern. Die Gewichtung ist über die Art des Schwerpunktes bestimmt (Massen/ Volumen ...). Hat der erste Teilkörper K_1 die Gewichtung G_1 und Teilkörper K_2 die Gewichtung G_2, so teilt der Schwerpunkt die Verbindungslinie von K_1 zu K_2 im Verhältnis G_2:G_1. Das heißt, von K_1 aus ist der Schwerpunkt $\frac{G_2}{G_1+G_2}$ der Verbindungslinie entfernt, von K_2 aus $\frac{G_1}{G_1+G_2}$. Bei gleicher Gewichtung liegt der Schwerpunkt in der Mitte der Verbindungslinie. ***ANS***

b) Rechnerische Bestimmung des Schwerpunktes:

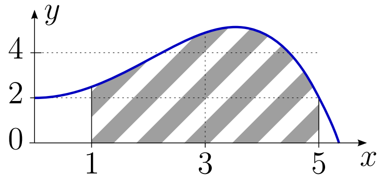
Ist die Lage des Schwerpunktes unbekannt, so kann sie jeweils für eine Koordinatenrichtung folgendermaßen bestimmt werden: In x-Richtung bezeichnet x_s den Schwerpunktsabstand und

$$x_s = \frac{\iint x \,\mathrm{d}A}{\iint \mathrm{d}A} = \frac{\int_{x_{\text{Start}}}^{x_{\text{Ende}}} \int_{y_{\text{Start}}}^{y_{\text{Ende}}} x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x}{\int_{x_{\text{Start}}}^{x_{\text{Ende}}} \int_{y_{\text{Start}}}^{y_{\text{Ende}}} \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x} \tag{26.1}$$

x eine Laufkoordinate. Für eine andere Richtung muss die Laufkoordinate entsprechend angepasst werden. x_{Start} und x_{Ende} sind die Integrationsgrenzen während die Fläche, von der der Schwerpunkt gesucht wird, durch die beiden Funktionen y_{Start} und y_{Ende} begrenzt wird. Oft ist eine von beiden die x-Achse und somit 0.

Beispiel

Es soll der Flächenschwerpunkt von einem Bereich bestimmt werden, der durch eine Funktion begrenzt/beschrieben wird:



Zuerst sind Funktion und Integrationsgrenzen zu bestimmen (hier: $y(x) = -\frac{1}{50}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2$ im Intervall $[1{,}5]$). Anschließend wird alles in Gleichung (26.1) eingesetzt:

$$x_s = \frac{\int_1^5 \int_0^{y(x)} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x}{\int_1^5 \int_0^{y(x)} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x} = \frac{\int_1^5 x y(x) \, \mathrm{d}x}{\int_1^5 y(x) \, \mathrm{d}x} = \frac{\int_1^5 x(-\frac{1}{50}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2) \, \mathrm{d}x}{\int_1^5 -\frac{1}{50}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2 \, \mathrm{d}x}$$

$$= \frac{\left[-\frac{1}{300}x^6 + \frac{1}{8}x^4 + x^2\right]_1^5}{\left[-\frac{1}{250}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + 2x\right]_1^5} = \frac{1170}{379} \approx 3{,}09$$

$$y_s = \frac{\int_1^5 \int_0^{y(x)} y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x}{\int_1^5 \int_0^{y(x)} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x} = \frac{\int_1^5 \frac{1}{2}y^2(x) \, \mathrm{d}x}{\int_1^5 y(x) \, \mathrm{d}x} = \frac{\int_1^5 \frac{x^8}{5000} - \frac{x^6}{100} + \frac{17}{200}x^4 + x^2 + 2 \, \mathrm{d}x}{\int_1^5 -\frac{1}{50}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2 \, \mathrm{d}x}$$

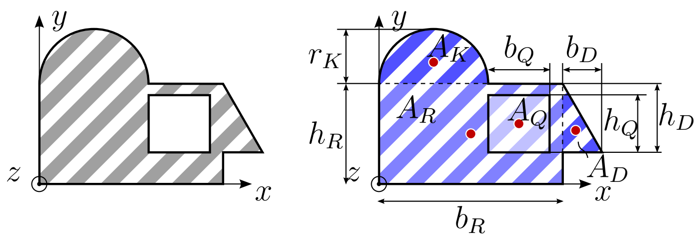
$$= \frac{\left[\frac{x^9}{45000} - \frac{x^7}{700} + \frac{17}{1000}x^5 + \frac{x^3}{3} + 2x\right]_1^5}{\left[-\frac{1}{250}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + 2x\right]_1^5} = \frac{168517}{79590} \approx 2{,}12$$

Bei der Bestimmung eines Gesamtschwerpunktes mit bekannten Einzelschwerpunkten x_i und Gewichtungen G_i (gegeben oder mit Gleichung (26.1) berechnet), kann Gleichung (27.1) verwendet werden.

$$x_s = \frac{\sum_i x_i G_i}{\sum_i G_i} \tag{27.1}$$

Beispiel

Flächenschwerpunkt von einer Gesamtfläche aus Teilflächen bestimmen:



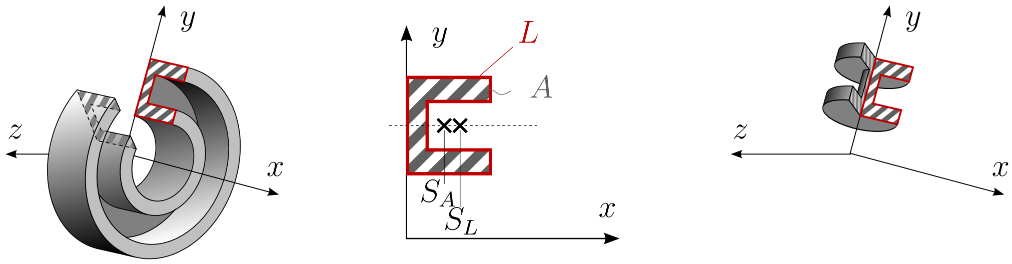
Zuerst sind Teilkörper zu wählen, dann deren Flächen und Schwerpunkte zu bestimmen. Anschließend wird alles in Gleichung (27.1) eingesetzt:

$$x_s = \frac{\frac{b_R}{2}A_R + r_K A_K + (b_R + \frac{b_D}{3})A_D - (2r_K + \frac{b_Q}{2})A_Q}{A_R + A_K + A_D - A_Q}$$

$$y_s = \frac{\frac{h_R}{2}A_R + (h_r + \frac{4r_K}{3\pi})A_K + (h_R - \frac{2h_D}{3})A_D - (h_R - h_D + \frac{h_Q}{2})A_Q}{A_R + A_K + A_D - A_Q}$$

Für den Gesamtschwerpunkt müssen alle Einzelschwerpunkte berücksichtigt werden, da ihre Gewichtung im Nenner von Gleichung (27.1) unabhängig von der Schwerpunktlage eingeht (d. h. auch bei $x_i = 0$). Wenn Teilsysteme nicht hinzugefügt, sondern entfernt werden sollen (z. B. Aussparungen auf einer Platte), dann geht die dazugehörige Gewichtung G_i negativ ein. Beim Linienschwerpunkt ergeben sich durch Aussparungen zusätzliche Linien, die (positiv) berücksichtigt werden müssen. Je nach Lage des Koordinatensystems ändern sich die Entfernungen der Teilschwerpunkte x_i und des Gesamtschwerpunkts x_s.

c) Guldinsche Regeln



Ein Schnittelement (dargestellt in der Mitte) soll um eine Achse gedreht werden. Mit Hilfe der beiden Guldinschen Regeln kann das Volumen bzw. die Oberfläche des Rotationskörpers durch Größen am Schnittelement bestimmt werden.

Um die Oberfläche O des Rotationskörpers zu bestimmen, kann Gleichung (28.1) benutzt werden. Im Schnitt müssen der Abstand d_L vom Linienschwerpunkt S_L zur Rotationsachse und die Gesamtlinienlänge L (Umfang) bestimmt werden. Hier ist zu beachten, dass Linien auf der Drehachse nach der Rotation keine äußeren Linien mehr sind und somit nicht zur Gesamtlinienlänge L zählen.

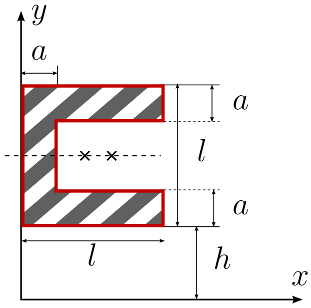
$$O = 2\pi d_L L \tag{28.1}$$

Analog wird für das Volumen V die Querschnittsfläche A und der Abstand d_A vom Flächenschwerpunkt S_A zur Rotationsachse bestimmt und in Gleichung (28.2) eingesetzt.

$$V = 2\pi d_A A \tag{28.2}$$

Beispiel

Oberfläche und Volumen bei Rotation um die x- bzw. y-Achse:



$$O_{\text{rot,x}} = 2\pi(h + \frac{l}{2})(6l - 2a) \qquad [L{=}6l{-}2a]$$

$$V_{\text{rot,x}} = 2\pi(h + \frac{l}{2})(3al - 2a^2) \qquad [A{=}3al{-}2a^2]$$

$$O_{\text{rot,y}} = 2\pi(2l^2 + 3al - 3a^2) \qquad [L{=}5l{-}2a]$$

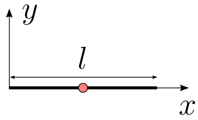
$$V_{\text{rot,y}} = 2\pi(al^2 + \frac{a^2}{2}l - a^3) \qquad [A{=}3al{-}2a^2]$$

Beispiel

Je nach Lage des Koordinatensystems ändern sich die Entfernungen der Teilschwerpunkte x_i und des Gesamtschwerpunkts x_s.

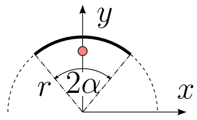
d) Auflistung einiger Schwerpunkte

Linienschwerpunkte (INA S. 42)



Länge: l

$x_s = \frac{1}{2}l$

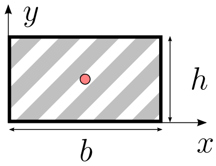


Länge: $2\alpha r$

$y_s = \frac{r\sin(\alpha)}{\alpha}$

$y_s(\text{Halbkreis}) = \frac{2r}{\pi}$

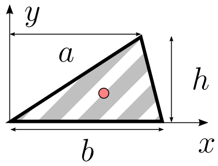
Flächenschwerpunkte (INA S. 34–35)



Fläche: $A = bh$

$x_s = \frac{b}{2}$

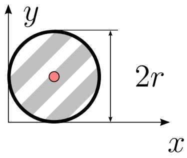
$y_s = \frac{h}{2}$



Fläche: $A = \frac{1}{2}bh$

$x_s = \frac{a+b}{3}b$

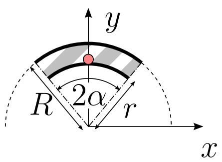
$y_s = \frac{1}{3}h$



Fläche: $A = \pi r^2$

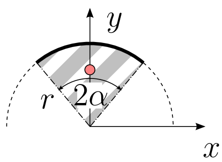
$x_s = r$

$y_s = r$



Fläche: $A = (R^2 - r^2)\alpha$

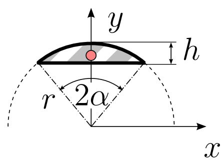
$y_s = \frac{2(R^3-r^3)\sin(\alpha)}{3(R^2-r^2)\alpha}$



Fläche: $A = \alpha r^2$

$y_s = \frac{2r\sin(\alpha)}{3\alpha}$

$y_s(\text{Halbkreis}) = \frac{4r}{3\pi}$

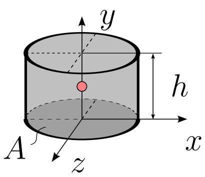


Fläche: $A = \frac{h(3h^2+16r^2\sin^2(\alpha))}{12r\sin(\alpha)}$

mit $h = r(1-\cos(\alpha))$

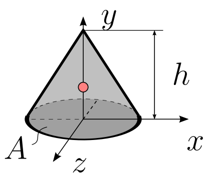
$y_s = \frac{4r\sin^3(\alpha)}{3(2\alpha-2\sin(\alpha))}$

Körperschwerpunkte (INA S. 40–41)



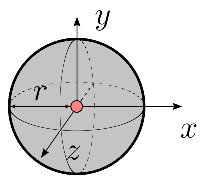
Volumen: $V = Ah$

$y_s = \frac{1}{2}h$



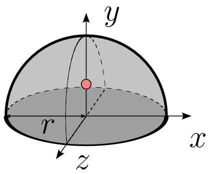
Volumen: $V = \frac{1}{3}Ah$

$y_s = \frac{1}{4}h$



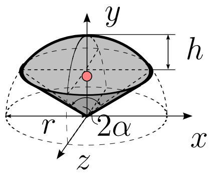
Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$y_s = 0$



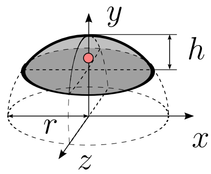
Volumen: $V = \frac{2}{3}\pi r^3$

$y_s = \frac{3}{8}r$



Volumen: $V = \frac{2}{3}h\pi r^2$

$y_s = \frac{3r(1+\cos(\alpha))}{8}$



Volumen: $V = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right)$

$y_s = \frac{3(2r-h)^2}{4(3r-h)}$

2.8
Schnittverläufe

Annahmen	starres System	statisch bestimmt

In einem statisch bestimmten System kann entlang eines Balkens oder Bogens der Kräfte- und Momentenverlauf bestimmt werden. An einem Balken kann dies vereinfachend mit der Föppl-Notation geschehen.

a) Notation und Integration

Wenn die äußeren Belastungen an einem Bauteil bekannt sind, können Kräfte- und Momentenverläufe berechnet werden. Während es im Zweidimensionalen an einem Balken einen Normalkraft-, einen Querkraft- und einen Momentenverlauf gibt, sind im Dreidimensionalen ein Normalkraft-, zwei Querkraft- und zwei Momentenverläufe möglich.

ANS Die Schnittverläufe repräsentieren den Verlauf der Belastungen im Bauteil durch die anliegenden äußeren Belastungen. ***ANS***

Die Vorgehensweise zur Bestimmung der Schnittverläufe ist immer gleich: Zuerst wird das betrachtete Bauteil freigeschnitten. Falls Streckenlasten auftauchen, wird der Streckenlastverlauf bestimmt. Dabei wird eine Belastung in positive Koordinatenrichtung auch positiv in Gleichung (30.1) berücksichtigt.

$$\boldsymbol{q}(x) = \sum_i \boldsymbol{q}_i(x) \tag{30.1}$$

Anschließend kann der Querkraftverlauf aus dem (negativen) Integral des Streckenlastverlaufes und der negativen Summe der äußeren Kräften bestimmt werden.[20] Anschaulich kann man (neben dem Integral) einfach die äußeren Kräfte in Koordinatenrichtung negativ annehmen und zusammen addieren.

$$\boldsymbol{Q}(x) = -\int_0^x \boldsymbol{q}(x)\,\mathrm{d}x - \sum_i \boldsymbol{Q}_{i,\text{äußere}}(x) \tag{30.2}$$

Um den Momentenverlauf zu erhalten, gilt es den Querkraftverlauf (ohne Vorzeichenänderung) zu integrieren und die negativen äußeren Momente dazu zu addieren.

$$\boldsymbol{M}(x) = \int_0^x \boldsymbol{Q}(x)\,\mathrm{d}x - \sum_i \boldsymbol{M}_{i,\text{äußere}}(x) \tag{30.3}$$

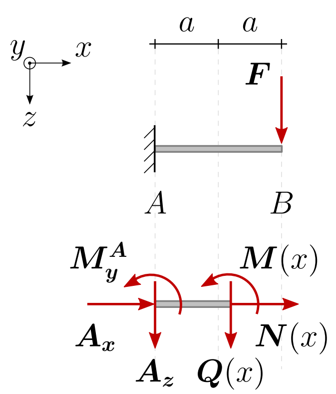
ANS Die Integrationen finden in den Grenzen von 0 bis x statt. Bei einigen Polynomen ist das zwar identisch mit einem Integral ohne Grenzen, aber im Allgemeinen (z. B. bei Verläufen mit $\sin(x)$ oder e^x) nicht. ***ANS***

[20] Beim Freischneiden werden Lagerkräfte/-momente und eventuell nötige Schnittgrößen bestimmt. Diese Belastungen sind auch äußere Belastungen für das Balkenteil.

Zusätzlich zu den anderen Verläufen kann aus den (negativen) Kräften entlang des Balkens der Normalkraftverlauf bestimmt werden. Da eine Streckenlast in Normalrichtung des Balkens sehr ungewöhnlich wäre, nehmen wir hier an, dass der Normalkraftverlauf allein aus den anliegenden Normalkräften bestimmt werden kann.

$$\boldsymbol{N}(x) = -\sum_i \boldsymbol{N}_{i,\text{äußere}}(x) \quad (31.1)$$

Beispiel



Am Ende des Balkens greift die Kraft $\boldsymbol{F}$ an. Die Lagerreaktionen $\boldsymbol{A_x} = 0$, $\boldsymbol{A_z} = -\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{M_y^A} = 2a\boldsymbol{F}$ können über die GGB bestimmt werden. Zur Bestimmung der Verläufe schneiden wir den Balken an der Stelle $0 \leq x < 2a$.[21] Da zwischen A und B keine weitere Belastung angreift, sind die beiden Verläufe $\boldsymbol{N}(x) = 0$ und $\boldsymbol{Q}(x) = \boldsymbol{F}$ konstant. Der Momentenverlauf lautet entsprechend $\boldsymbol{M}(x) = (x - 2a)\boldsymbol{F}$ und kann entweder über die Schnittgrößen oder aus Gleichung (30.3) bestimmt werden.

Meistens wirken mehrere Belastungen an einem Balken, die berücksichtigt werden müssen. Bei einer stückweisen Betrachtung wird jeweils nur der Bereich von einer Belastung bis kurz vor die nächste untersucht. Dabei gilt ganz allgemein bei einem Schnitt:

ANS

Wirkt eine Kraft in einem Schnitt, so wird sie einem Schnittufer zugewiesen. Wenn eine Streckenlast über den Schnitt hinweg wirkt, werden erst nach dem Schneiden die Ersatzkräfte der (beiden) Streckenlaststücke bestimmt.

b) Verläufe am geraden Balken (Föppl-Verläufe)

Bei einem geraden Balken – und nur da – können die Schnittverläufe mit Hilfe der Föppl-Notation in einem Schritt aufgeschrieben werden.

Für einen Föppl-Verlauf müssen wir berücksichtigen, an welcher Stelle eine Belastung einsetzt. Deshalb definieren wir eine Föppl-Klammer, die Null ist, solange unser aktueller Ort x noch vor dem Angriffspunkt a der Belastung ist. Haben wir den Angriffspunkt der Belastung überschritten ($x \geq a$), so ist auch der Wert der Föppl-Klammer

$$\{x-a\}^0 = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (31.2)$$

$$\{x-a\}^k = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ (x-a)^k & \text{sonst} \end{cases} \quad (31.3)$$

[21] Bei den Verläufen ist x sowohl eine Koordinatenrichtung als auch eine Laufkoordinate bzw. Variable.

größer als Null. Wenn an der Stelle b die Kraft $\boldsymbol{F}$ angreift, so lautet die Föppl-Notation davon im Kraftverlauf $\boldsymbol{F}\left\{x-b\right\}^0$.

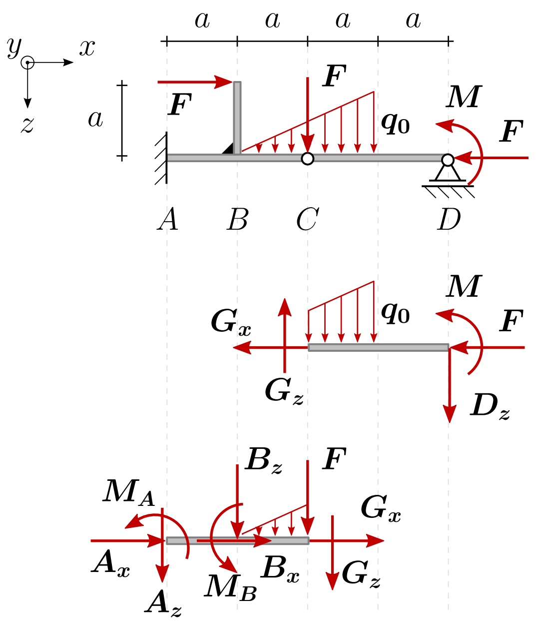
ANS Bei sprunghaften Änderungen (Kräfte im Kraftverlauf, Momente im Momentenverlauf) ist der Föppl-Exponent Null. Lineare Änderungen haben den Föppl-Exponent Eins, quadratische Zwei usw. ***ANS***

Bei nicht-konstanten Streckenlasten ist zusätzlich auf den richtigen Vorfaktor zu achten. Außerdem können Ausdrücke mit Föppl-Klammern am Ende des Balkens für Exponenten $k > 0$ weggelassen werden.

Die Integration einer Föppl-Klammer ist analog zur normalen Integration und in Gleichung (32.1) dargestellt.[22]

$$\int \left\{x-a\right\}^k \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\left\{x-a\right\}^{k+1} \qquad (32.1)$$

Beispiel (Teil 1–2)



Am Links dargestellten Balkenteil A–D sollen die Verläufe berechnet und gezeichnet werden. Zuerst wird der Balken freigeschnitten, um alle Lager- und Reaktionskräfte zu bestimmen. Dazu muss das System im Gelenk in zwei Teile geteilt werden. Die Kraft im Gelenk wird einer Seite zugewiesen, die Streckenlast geteilt. Für die Verläufe von A–D müssen wir zusätzlich noch den Seitenarm über B wegschneiden. Es ergeben sich:

$$\boldsymbol{q(x)} = \tfrac{\boldsymbol{q_0}}{2a}\left\{x-a\right\}^1 - \boldsymbol{q_0}\left\{x-3a\right\}^0 - \tfrac{\boldsymbol{q_0}}{2a}\left\{x-3a\right\}^1$$

$$\boldsymbol{N(x)} = -\boldsymbol{A_x} - \boldsymbol{B_x}\left\{x-a\right\}^0 + \boldsymbol{F}\left\{x-4a\right\}^0$$

$$\boldsymbol{Q(x)} = -\boldsymbol{A_z} - \tfrac{\boldsymbol{q_0}}{4a}\left\{x-a\right\}^2 - \boldsymbol{F}\left\{x-2a\right\}^0 + \boldsymbol{q_0}\left\{x-3a\right\}^1 + \tfrac{\boldsymbol{q_0}}{4a}\left\{x-3a\right\}^2 - \boldsymbol{D_z}\left\{x-4a\right\}^0$$

$$\boldsymbol{M(x)} = -\boldsymbol{M_A} - \boldsymbol{A_z}x - \boldsymbol{M_B}\left\{x-a\right\}^0 - \tfrac{\boldsymbol{q_0}}{12a}\left\{x-a\right\}^3 - \boldsymbol{F}\left\{x-2a\right\}^1 + \tfrac{\boldsymbol{q_0}}{2}\left\{x-3a\right\}^2 + \tfrac{\boldsymbol{q_0}}{12a}\left\{x-3a\right\}^3 - \boldsymbol{M}\left\{x-4a\right\}^0$$

Mit $\boldsymbol{F} = \frac{1}{4}\boldsymbol{q_o}a$ und $\boldsymbol{M} = -\frac{7}{12}\boldsymbol{q_o}a^2$ gilt:

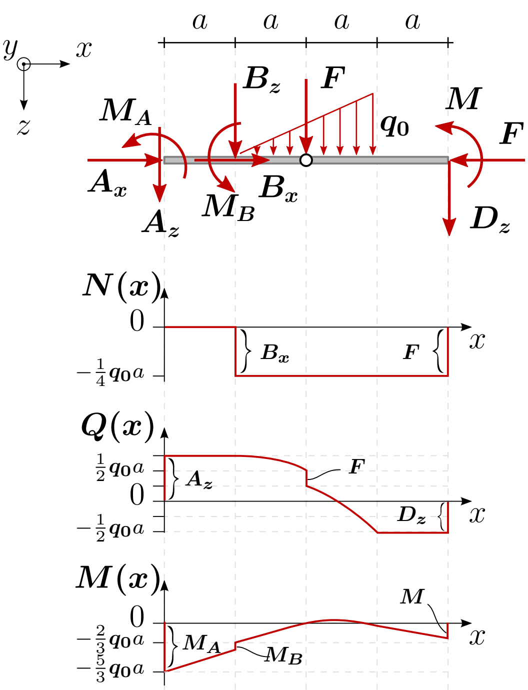
Äußere Belastungen: $\boldsymbol{A_x} = 0,\ \boldsymbol{A_z} = -\frac{3}{4}\boldsymbol{q_0}a,\ \boldsymbol{M_A} = \frac{5}{3}\boldsymbol{q_0}a^2,\ \boldsymbol{B_x} = \frac{1}{4}\boldsymbol{q_0}a,$
$\boldsymbol{B_z} = 0,\ \boldsymbol{M_B} = -\frac{1}{4}\boldsymbol{q_0}a^2,\ \boldsymbol{D_z} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{q_0}a.$

Innere Belastungen: $\boldsymbol{G_x} = -\frac{1}{4}\boldsymbol{q_0}a,\ \boldsymbol{G_z} = \frac{1}{4}\boldsymbol{q_0}a.$

Beispiel (Teil 1–2)

[22] Alles vor der Föppl-Klammer muss unabhängig von x sein, da sonst partiell integriert werden müsste.

Beispiel (Teil 2–2)



Rechts sind die Schnittverläufe dargestellt. Beim Zeichnen gilt es, die Potenzen der Föppl-Klammern zu beachten (Null: Sprung, Eins: linear, usw.). Somit erzeugen Kräfte im Kräfteverlauf bzw. Momente im Momentenverlauf einen Sprung. Der Querkraftverlauf ist im Bereich $a < x < 2a$ quadratisch. Der Momentenverlauf ist in einem Gelenk immer Null (überträgt kein Moment) und hat ein Extremum, wenn der Querkraftverlauf Null ist. Da der Querkraftverlauf zwischen 0 und a, sowie zwischen $3a$ und $4a$ konstant ist, ist der Momentenverlauf in den Bereichen linear.

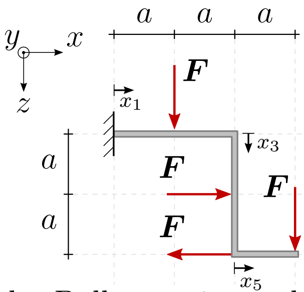
Beispiel (Teil 2–2)

c) Verläufe um Ecken (Rahmen)

Wenn das Bauteil aus mehreren geraden Balkenteilen zusammengesetzt ist, die jeweils rechtwinklig aufeinander stehen, dann kann eine leicht modifizierte stückweise Betrachtung durchgeführt werden.

Das Bauteil wird wie gewohnt an den Angriffspunkten äußerer Belastungen geschnitten und in Abschnitte unterteilt. Zusätzlich ist es auch nötig, an den Ecken des Balkens zu schneiden. Durch die rechtwinkligen Verbindungen wird aus dem Querkraftverlauf vor der Ecke der (möglicherweise negative) Normalkraftverlauf nach der Ecke und umgekehrt.

Beispiel (Teil 1–2)

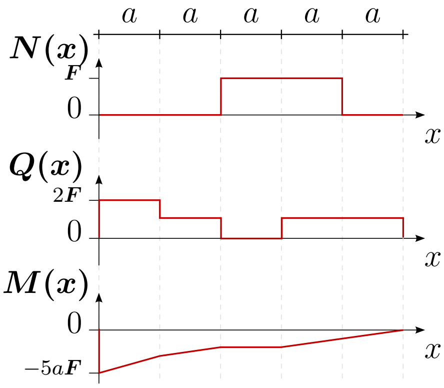


Es sollen die Schnittverläufe entlang des dargestellten Balkensystems der Länge $5a$ angegeben werden. Zuerst Freischneiden und Lagerreaktionen bestimmen ($\boldsymbol{A_x} = 0$, $\boldsymbol{A_z} = -2\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{M_y^A} = 5a\boldsymbol{F}$). Dann gilt es an den Ecken zu beachten, dass die Normalkraft immer entlang des Balkens zeigt und die Querkraft sich entsprechend der anfänglichen Ausrichtung zur Normalkraft ändert. Für das erste Teilstück von $x_1 = 0$ bis a ergeben sich $\boldsymbol{N_1}(x) = 0$, $\boldsymbol{Q_1}(x) = 2\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{M_1}(x) = (2x_1 - 5a)\boldsymbol{F}$.

Beispiel (Teil 1–2)

Beispiel (Teil 2–2)

In der folgenden Übersicht sind die stückweisen Verläufe für alle fünf Intervalle zusammengefasst. Zu Beginn eines jeden Intervalls i startet auch ein neuer Zähler x_i.

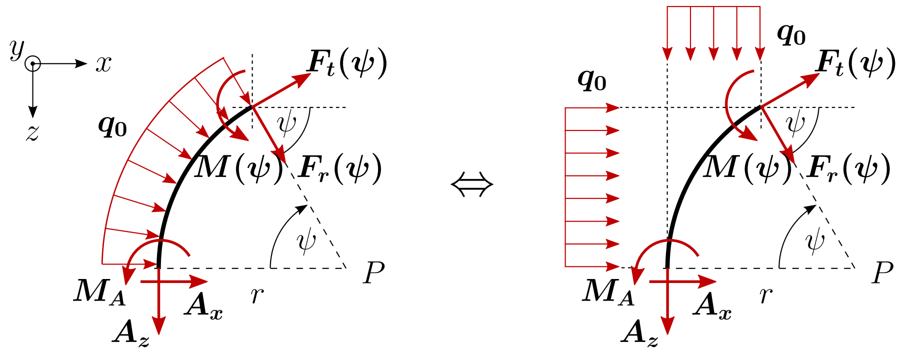


	$\boldsymbol{N(x)}$	$\boldsymbol{Q(x)}$	$\boldsymbol{M(x)}$
Stück 1	0	$2\boldsymbol{F}$	$(2x_1 - 5a)\boldsymbol{F}$
Stück 2	0	$\boldsymbol{F}$	$(x_2 - 3a)\boldsymbol{F}$
Stück 3	$\boldsymbol{F}$	0	$-2a\boldsymbol{F}$
Stück 4	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$(x_4 - 2a)\boldsymbol{F}$
Stück 5	0	$\boldsymbol{F}$	$(x_5 - a)\boldsymbol{F}$

d) Verläufe am Bogen

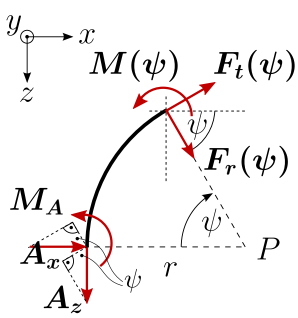
Bei Kreisbögen ändert sich die Richtung kontinuierlich. Deshalb bietet es sich an, die Verläufe abhängig von Radius und Winkel anzugeben. Bei einer Belastung mit einer konstanten Streckenlast gilt:[23]

SYN



SYN

Beispiel



Kräftegleichgewichte in x- und z-Richtung:

$\sum \boldsymbol{F_x}\ :\ 0 = \boldsymbol{A_x} + \boldsymbol{F_t(\psi)}\sin(\psi) + \boldsymbol{F_r(\psi)}\cos(\psi)$

$\sum \boldsymbol{F_z}\ :\ 0 = \boldsymbol{A_z} - \boldsymbol{F_t(\psi)}\cos(\psi) + \boldsymbol{F_r(\psi)}\sin(\psi)$

Man erhält die Schnittverläufe schneller, wenn stattdessen die Kräftegleichgewichte in tangentialer und radialer Richtung betrachtet werden:

$\sum \boldsymbol{F}_{\text{tan}}\ :\ 0 = \boldsymbol{A_x}\sin(\psi) - \boldsymbol{A_z}\cos(\psi) + \boldsymbol{F_t(\psi)}$

$\sum \boldsymbol{F}_{\text{rad}}\ :\ 0 = \boldsymbol{A_x}\cos(\psi) + \boldsymbol{A_z}\sin(\psi) + \boldsymbol{F_r(\psi)}$

In beiden Fällen bietet es sich an, das Momentengleichgewicht um den Mittelpunkt des Kreisbogens aufzustellen.

$\sum \boldsymbol{M_y^P}\ :\ 0 = r\boldsymbol{A_z} + \boldsymbol{M_A} - r\boldsymbol{F_t(\psi)} + \boldsymbol{M(\psi)}$

Beispiel

[23] Mit Gleichung (18.3) nachprüfbar, wenn die Koordinaten des Kreisbogens entsprechend mit Sinus und Kosinus parametrisiert werden.

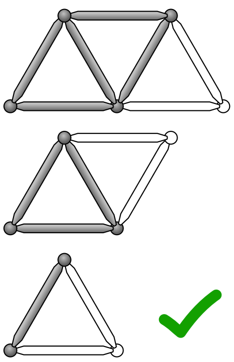
2.9
Fachwerke

Annahmen	starres System statisch bestimmt	dünne Zugstäbe

Ein Fachwerk besteht aus starren, dünnen Stäben, die über Gelenke miteinander verbunden sind. Dabei können die Stäbe nur in Stabrichtung Kräfte übertragen. Die Stabkräfte können entweder über das Knotenpunktverfahren oder das Rittersche Schnittverfahren bestimmt werden.

a) Abbaubarkeit

Bei Fachwerken ist es wichtig zu erkennen, ob das Fachwerk einfach ist. Einfache Fachwerke sind statisch und kinematisch bestimmt und können, z. B. mit dem Knotenpunktverfahren, berechnet werden. Sie erfüllen die Formel der Abbaubarkeit (notwendige Bedingung) und können vorschriftsgemäß zerlegt werden (notwendige und hinreichende Bedingung).[24]

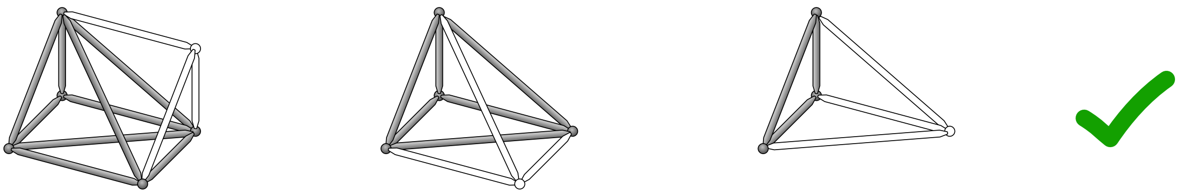


Ein Zweidimensionales Fachwerk ist dann einfach und abbaubar, wenn so lange ein Knoten (Gelenk) und zwei anliegende Stäbe entfernt werden können, bis ein einzelner Stab mit zwei Knoten übrig bleibt. Die Abbaubarkeit selbst kann rechnerisch mit Gleichung (35.1) überprüft werden. In der Formel ist s die Anzahl der starren Elemente zwischen den Knoten (meistens Stäbe) und k die Anzahl der Knoten/Gelenke.

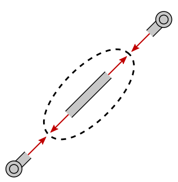
$$\boxed{s = 2k - 3 \qquad (35.1)}$$

Im Dreidimensionalen muss für die Einfachheit ein Knoten mit drei Stäben entfernt werden können, bis nur noch ein Dreieck mit drei Stäben und drei Knoten übrig bleibt. Für die Abbaubarkeit gilt Gleichung (35.2).

$$\boxed{s = 3k - 6 \qquad (35.2)}$$



b) Annahme Zugstäbe

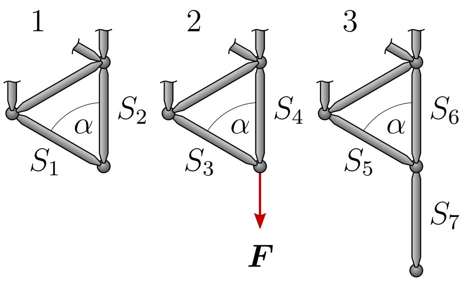


Beim Schnitt von starren Stäben wird angenommen, dass es sich um Zugstäbe handelt. Das heißt, dass beim Schnitt von einem Stab die Belastungen vom Stab weg (positive Zugrichtung) zeigen. Natürlich zeigen deshalb die Belastungen am Schnittufer des Knotens zum Stab hin.

[24]Nicht-einfache Fachwerke, die „nur“ die Gleichung für die Abbaubarkeit erfüllen (und kinematisch und statisch bestimmt sind), können noch mit Hilfe des Ritterschen Schnittverfahrens berechnet werden.

c) Nullstäbe

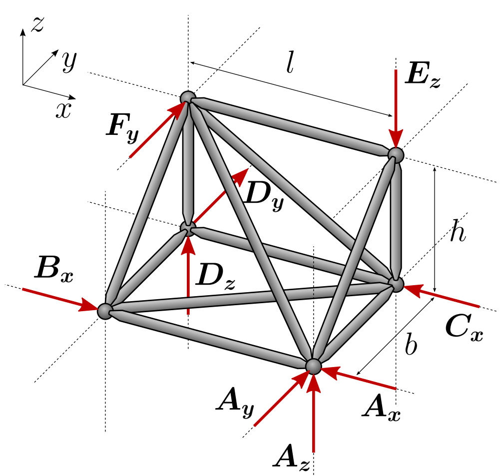
Ein Nullstab ist ein Stab ohne Belastungen. Er kann für Berechnungen vernachlässigt werden. Um Nullstäbe zu erkennen, werden die einzelnen Knoten betrachtet. Kann eine Kraftkomponente eines Stabes an einem Knoten nicht von irgendeinem anderen anliegenden Stab aufgenommen werden, so handelt es sich bei dem Stab um einen Nullstab. Kann ein Stab von einem Knoten aus nicht als Nullstab identifiziert werden heißt das nicht, dass er kein Nullstab ist, sondern nur, dass von diesem Knoten aus keine Aussage möglich ist. Im Zweidimensionalen gibt es folgende Fälle:



An einem Knoten mit nur zwei Stäben S_1 und S_2, die nicht in einer Linie sind ($\alpha \neq 180°$), sind beide Stäbe Nullstäbe. Greift an einem Knoten mit zwei Stäben S_3 und S_4 eine Kraft F an, die genau in Richtung eines Stabes geht (hier S_4), dann ist der andere Stab ein Nullstab (Geht die Kraft nicht genau in Richtung eines Stabes, dann kann an dem Knoten keine Aussage über offensichtliche Nullstäbe getroffen werden). Die gleiche Situation ergibt sich bei einem Knoten mit drei Stäben S_5, S_6 und S_7. Gehen zwei Stäbe in die gleiche Richtung, ist der dritte ein Nullstab und die anderen beiden gleich groß.[25]

Die Idee hinter den Regeln gilt auch im Dreidimensionalen: Wenn eine Stabkraft oder ein Anteil davon an einem Knoten nicht von anderen Stäben/Kräften aufgenommen werden kann, so muss der dazugehörige Stab ein Nullstab sein.

Beispiel



Rechts kann man an Knoten E erkennen, dass S_{AE} (einziger mit y-Anteilen) und S_{EF} (einziger mit x-Anteilen) Nullstäbe sind, da diese Anteile nicht von anderen Stäben/Kräften am Knoten aufgenommen werden können (Überprüfbar mit GGB). Genauso sind S_{CD} von D aus betrachtet und S_{BF} von B aus betrachtet offensichtlich Nullstäbe. Alle anderen Stäbe können nicht als offensichtliche Nullstäbe klassifiziert werden.

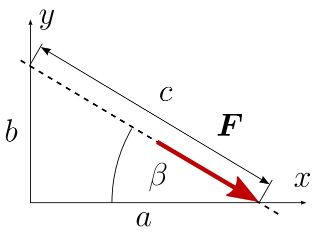
Beispiel

---

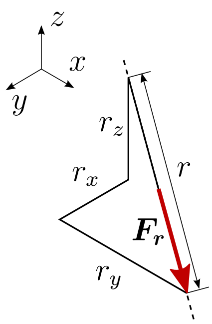
[25] Eine Überprüfung aller Aussagen kann mit Hilfe der beiden Kräftegleichgewichte am Knoten durchgeführt werden.

d) Stabkräfte im Dreidimensionalen

Wie in Abschnitt 2.3 angesprochen, gibt es zwei eng verwandte Methoden, die Richtungsanteile beliebig orientierter Kräfte zu berechnen. Die eine Variante ist die Projektion auf die gesuchte Richtung (wofür im Allgemeinen zwei Projektionen im Dreidimensionalen durchgeführt werden), die andere über die Längenverhältnisse (Gauß-Vektoren).



Dabei ist die erste Variante sinnvoll, wenn keine Bezugslängen, sondern nur der/die Winkel gegeben sind (z. B. $\boldsymbol{F_x} = \cos(\beta)\boldsymbol{F}$). Die zweite Variante ist geschickt, wenn mit vorhandenen Längenverhältnissen die Wirkungslinie der Kraft beschrieben werden kann (z. B. $\boldsymbol{F_x} = \frac{a}{c}\boldsymbol{F}$). Die Verwandtschaft besteht darin, dass wegen der Trigonometrie gilt: $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$.

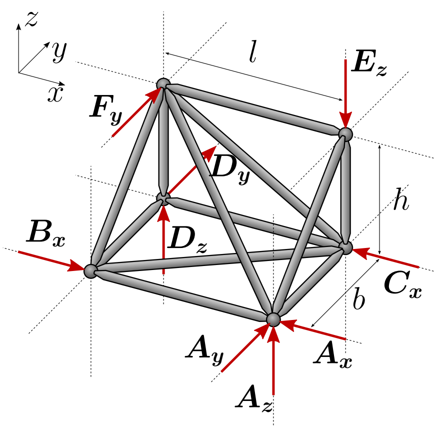


$$\boxed{\begin{pmatrix} \boldsymbol{F_{r,x}} \\ \boldsymbol{F_{r,y}} \\ \boldsymbol{F_{r,z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \frac{1}{r} \boldsymbol{F_r} \qquad (37.1)}$$

Kennt man die Wirkungslinie des Kraftvektors (beispielsweise in Stäben entlang des Stabes), dann kann man aus der Geometrie Rückschlüsse auf die Wirkungslinie und somit auf die Kraftanteile ziehen. Da r_x, r_y und r_z jeweils senkrecht aufeinander stehen, gilt sowohl Gleichung (37.1), als auch $\frac{r_x}{r} + \frac{r_y}{r} + \frac{r_z}{r} = 1$ (Addition senkrechter Vektoren zu einem Vektor der Länge r)[26].

$$\frac{r_x+r_y+r_z}{r} = \frac{r_x+r_y+r_z}{\sqrt{r_x^2+r_y^2+r_z^2}} = \sqrt{\frac{r_x^2+r_y^2+r_z^2+\cancelto{0}{2r_xr_y}+\cancelto{0}{2r_xr_z}+\cancelto{0}{2r_yr_z}}{r_x^2+r_y^2+r_z^2}} = \sqrt{\frac{r_x^2+r_y^2+r_z^2}{r_x^2+r_y^2+r_z^2}} = 1$$

Beispiel



Wie wir vor kurzem gesehen haben, ist S_{AE} ein Nullstab. Sind die eingezeichneten angreifenden Kräfte bekannt und wollen wir $\boldsymbol{S}_{\mathrm{AF}}$ berechnen, so können wir dazu die Längenverhältnisse von S_{AF} und das Kräftegleichgewicht in z-Richtung in Knoten A nutzen:

$$\sum \boldsymbol{F_z^A} \;:\; 0 = \boldsymbol{A_z} + \frac{h}{\sqrt{l^2+b^2+h^2}} \boldsymbol{S}_{\mathrm{AF}}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{S}_{\mathrm{AF}} = -\frac{\sqrt{l^2+b^2+h^2}}{h} \boldsymbol{A_z}$$

Natürlich kann man S_{AF} auch erst auf die xz- oder yz-Ebene projizieren und dann den z-Anteil bestimmen (zwei mal 2D Pythagoras), aber über die Längenverhältnisse geht es schneller (ein mal 3D Pythagoras).

Beispiel

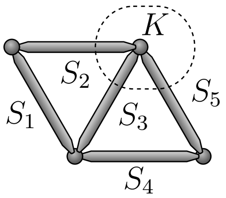
---

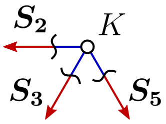
[26] Die Länge r berechnet sich nach Pythagoras im Dreidimensionalen zu $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$.

e) Knotenpunktverfahren

Nach der Überprüfung der Einfachheit des Fachwerks und der Nullstäbe können Stabkräfte mit dem Knotenpunktverfahren oder dem Ritterschen Schnittverfahren berechnet werden.[27]

Schneidet man einzelne Knoten an einem Fachwerk frei, so gibt es dort auf Grund des Gelenks kein Moment. Außerdem können alle am Knoten anliegenden Stäbe nur Kräfte in Stabrichtung aufnehmen. Dadurch können an jedem Knoten einfach zwei Kräftegleichgewichte aufgestellt werden, um die Stabkräfte miteinander zu koppeln/zu berechnen.

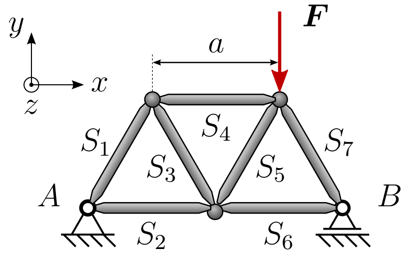




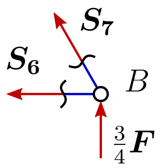
Beim Knotenpunktverfahren arbeitet man sich knotenweise zu dem Stab hin, der einen interessiert. Es ist möglich, dass auf Grund der Abhängigkeiten ein viel größerer Bereich des Fachwerks berechnet werden muss, um eine Stabkraft eindeutig zu bestimmen.

Beispiel

Alle Stäbe im dargestellten Fachwerk haben die Länge a. Es ist die Stabkraft $\boldsymbol{S_4}$ in S_4 zu berechnen.

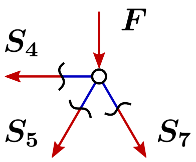


Durch Freischneiden und GGB können die Lagerreaktionen (in positive Koordinatenrichtung angenommen) zu $\boldsymbol{A_x} = 0$, $\boldsymbol{A_y} = \frac{1}{4}\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{B_y} = \frac{3}{4}\boldsymbol{F}$ bestimmt werden.[28] Die Idee ist jetzt, erst Knoten B und dann den Knoten oben rechts zu betrachten. Für Knoten B ergibt sich:



$$\sum \boldsymbol{F_x} \;:\; 0 = -\boldsymbol{S_6} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{S_7}$$
$$\sum \boldsymbol{F_y} \;:\; 0 = \tfrac{3}{4}\boldsymbol{F} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{S_7} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{S_7} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{F}.$$

Das Kräftegleichgewicht in y-Richtung würde schon reichen. Mit beiden können wir auch beide Stabkräfte eindeutig bestimmen. Für den Knoten oben rechts gilt:



$$\sum \boldsymbol{F_x} \;:\; 0 = -\boldsymbol{S_4} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{S_5} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{S_7}$$
$$\sum \boldsymbol{F_y} \;:\; 0 = -\boldsymbol{F} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{S_5} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{S_7} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S_5} = -\tfrac{\sqrt{3}}{6}\boldsymbol{F}.$$

Nach etwas Rechnen können wir feststellen:

$\boldsymbol{S_4} = -\frac{\sqrt{3}}{6}\boldsymbol{F}$ und S_4 ist somit ein Druckstab.

Beispiel

Alle einfachen Fachwerke können so berechnet werden. Wenn nur einzelne Stabkräfte bestimmt werden sollen, ist das Rittersche Schnittverfahren oftmals schneller.

---

[27] Vor den Berechnungen wie immer: Freischneiden und Lagerreaktionen bestimmen, siehe Abschnitt 2.3 und 2.4.

[28] Falls die Bestimmung der Winkel zwischen den Stäben noch nicht klar ist (60°), dann sollte man sich die Verhältnisse an Dreiecken klar(er) machen. Ein paar Tips werden in Abschnitt 1.3 und 1.4 gegeben.

f) Rittersches Schnittverfahren

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung von Fachwerken bietet das Rittersche Schnittverfahren. Hier wird ein Teilsystem mit mehr als einen Knoten freigeschnitten.

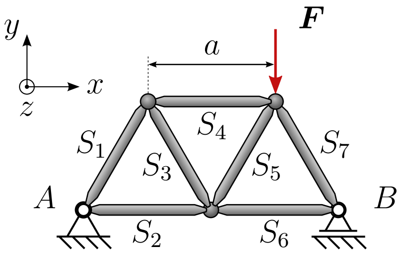
Wenn man alle Lagerreaktionen/äußeren Belastungen bestimmt hat, sorgt der Schnitt dafür, dass nur die Stabkräfte der geschnittenen Stäbe als unbekannte Kräfte auftreten. Natürlich kann man ein Teilsystem nach Belieben freischneiden (siehe Abschnitt 2.4), aber man hat nur drei Gleichgewichtsbedingungen im Zweidimensionalen (sechs im Dreidimensionalen) zur Verfügung. Daraus folgt unmittelbar:

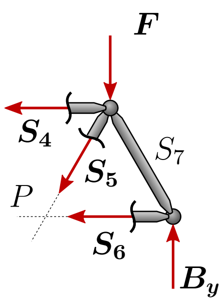
ANS Im Zweidimensionalen können bei einem Schnitt durch maximal drei Stäbe alle Stabkräfte eindeutig berechnet werden. ***ANS***

Mit geschickter Wahl von Schnitt und Bezugspunkt vom Momentengleichgewicht kann das Verfahren deutlich schneller sein als das Knotenpunktverfahren. Der Bezugspunkt kann natürlich auch außerhalb des freigeschnittenen Teilsystems liegen. Zur Veranschaulichung verwenden wir nochmal das gleiche Beispiel wie oben beim Knotenpunktverfahren.

Beispiel

Alle Stäbe im dargestellten Fachwerk haben die Länge a. Es ist die Stabkraft $\boldsymbol{S_4}$ in S_4 zu berechnen.





Durch Freischneiden zeigt sich wieder $\boldsymbol{A_x} = 0$, $\boldsymbol{A_y} = \frac{1}{4}\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{B_y} = \frac{3}{4}\boldsymbol{F}$. Im nächsten Schritt schneidet man das Fachwerk so, dass im Schnitt die gesuchte Stabkraft auftritt: z. B. durch S_4, S_5 und S_6.

Wählt man den richtigen Bezugspunkt für das Momentengleichgewicht (Schnittpunkt der anderen Schnittkräfte, Punkt P), dann kann $\boldsymbol{S_4}$ mit einem einzigen Momentengleichgewicht bestimmt werden:

$$\sum \boldsymbol{M_z^P} \;:\; 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}a\boldsymbol{S_4} - \frac{1}{2}a\boldsymbol{F} + a\boldsymbol{B_y}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S_4} = -\frac{\sqrt{3}}{6}\boldsymbol{F}.$$

Wollten wir $\boldsymbol{S_5}$ bestimmen, so haben wir keinen Bezugspunkt, an dem sich die anderen beide Stabkräfte schneiden ($S_4 \parallel S_6$). Also betrachten wir das Kräftegleichgewicht senkrecht zu den anderen Kräften (hier y-Richtung) und sind wieder in einem Schritt fertig.

Beispiel

Wenn man den einfachsten Weg nicht sieht, kann man die drei Stabkräfte auch immer mit den GGB (zwei Kräftegleichgewichten und ein Momentengleichgewicht) berechnen.

2.10
Reibung

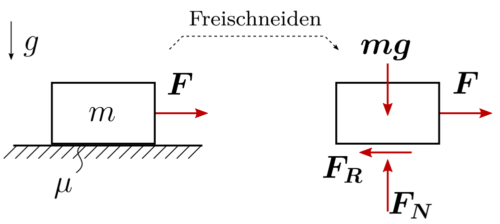
Annahmen	starres System	statisch bestimmt

An Körpern werden Haftreibung und Gleitreibung betrachtet, an Seilen Seilreibung. Solange sich das reibungsbehaftete System nicht bewegt, liegt Haftreibung vor. Es gilt die Reibungleichung mit dem dazugehörigen Haftreibungskoeffizienten μ_H. Für die Ungleichung kann zusätzlich der Reibkegel aufgestellt werden. Bewegt sich das System, so gilt die Reibgleichung für Gleitreibung mit dem Gleitreibungskoeffizienten μ_G.

a) Haftreibung:

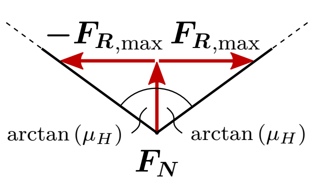
$$|\boldsymbol{F_R}| \leq \mu_H |\boldsymbol{F_N}| \qquad (40.1)$$

Bei der Haftreibung wird der Zusammenhang zwischen Normalkraft und Reibkraft mit der Reibbedingung bzw. Reibungleichung beschrieben. Solange $|\boldsymbol{F_R}| < \mu_H |\boldsymbol{F_N}|$ gilt, bewegt sich der Körper nicht. In diesen Fällen kann der tatsächliche Betrag der Reibkraft nur über andere Bedingungen (z. B. Kräftegleichgewichte) ermittelt werden. Für den Grenzfall $|\boldsymbol{F_{R,\mathrm{max}}}| = \mu_H |\boldsymbol{F_N}|$ bewegt sich der Körper gerade noch nicht. Hier kann die Reibkraft auch direkt über die Normalkraft ermittelt werden.



Beim Freischneiden einer reibungsbehafteten Auflage wird die Reibkraft orthogonal zur Normalkraft, und entgegen der (angenommenen) Bewegungsrichtung eingetragen. Jene ergibt sich aus der Richtung der restlichen angreifenden Kräfte in Bezug auf die Auflagefläche. Die Normalkraft greift nicht unbedingt in der Mitte des Körpers an. Der Angriffsort kann über Randbedingungen (z. B. der Körper kippt/kippt gerade nicht: Normalkraft wirkt im Kipppunkt) gegeben sein, oder über das Momentengleichgewicht bestimmt werden, sofern alle nötigen Längen, sowie Angriffspunkte und Beträge der restlichen Kräfte bekannt sind.

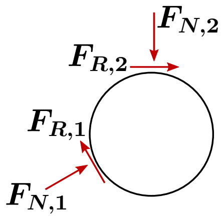
Der Reibkegel als grafische Interpretation von Gleichung (40.1):



Die Kräfte $\boldsymbol{F_N}$ und $\boldsymbol{F_R}$ stehen senkrecht aufeinander und die Reibkennzahl μ_H beschreibt die Steigung des Reibkegels für $\boldsymbol{F_R} = \boldsymbol{F_{R,\mathrm{max}}}$.[29] Da die Reibkraft jeder Belastung entgegenwirkt, kann sie symmetrisch um die Ruhelage $\boldsymbol{F_R} = 0$ angenommen werden.

[29] Da für die Steigung gilt: Steigung $=$ tan (Steigungswinkel) $= \tan(\arctan(\mu_H)) = \mu_H$.

ANS



Bei Rotationskörpern (z. B. Zylinder) müssen alle Reibkräfte $\boldsymbol{F_{R_i}}$ einer angenommenen Drehrichtung entgegen wirken und werden deshalb alle in die gleiche, entgegengesetzte Drehrichtung angenommen. Nur so erzeugen die Reibkräfte gemeinsam ein gegenläufiges Drehmoment.

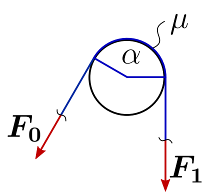
ANS

b) Gleitreibung:

$$|\boldsymbol{F_R}| = \mu_G |\boldsymbol{F_N}| \qquad (41.1)$$

Falls die angreifenden Kräfte den Körper bewegen, also größer sind als $|\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{R},\max}|$ der Haftreibung, dann wird für die Bewegung der Gleitreibungskoeffizient μ_G an Stelle von μ_H betrachtet. Im Allgemeinen wirkt ein größerer Widerstand beim Übergang von Ruhe zur Bewegung, als während der Bewegung, so dass der Haftreibungskoeffizient größer ist als der Gleitreibungskoeffizient ($\mu_G < \mu_H$).

c) Seilreibung:



$$\frac{|\boldsymbol{F_1}|}{|\boldsymbol{F_0}|} = e^{\mu\alpha} \qquad (41.2)$$

Wird ein Seil über eine Umlenkrolle geleitet, deren Auflagefläche reibungsbehaftet ist, so ändert sich die Seilkraft wegen Reibungsverlusten. Dabei ist Dicke der Umlenkrolle/Auflage egal, nur Auflagewinkel und Reibungskoeffizient sind von Bedeutung. Es gilt die Eytelweinsche Gleichung (41.2).

Im reibungsfreien Fall gilt $e^0 = 1$ und somit $|\boldsymbol{F_0}| = |\boldsymbol{F_1}|$. Für alle anderen Fälle sind die Reibungsverluste im Faktor $e^{\mu\alpha}$ enthalten. Da die e-Funktion streng monoton steigt, gelten folgende Zusammenhänge:

ANS Der, der das Seil zu sich bewegen will, muss stärker ziehen als die andere Kraft und die Reibkraft zusammen (Faktor vor der anderen Kraft > 1). ***ANS***

$\lvert\boldsymbol{F_1}\rvert < e^{-\mu\alpha}\lvert\boldsymbol{F_0}\rvert$	$\lvert\boldsymbol{F_1}\rvert = \lvert\boldsymbol{F_0}\rvert$	$\lvert\boldsymbol{F_1}\rvert > e^{\mu\alpha}\lvert\boldsymbol{F_0}\rvert$
$\boldsymbol{F_0}$ bewegt das Seil zu sich	**nichts bewegt sich**	$\boldsymbol{F_1}$ bewegt das Seil zu sich
	$\lvert\boldsymbol{F_1}\rvert < \lvert\boldsymbol{F_0}\rvert$ | $\lvert\boldsymbol{F_1}\rvert > \lvert\boldsymbol{F_0}\rvert$	

$|\boldsymbol{F_1}| = e^{-\mu\alpha}|\boldsymbol{F_0}|$ $\qquad$ $|\boldsymbol{F_1}| = e^{\mu\alpha}|\boldsymbol{F_0}|$

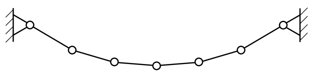
Wenn Schwierigkeiten beim Bestimmen der größeren (ziehenden) Kraft entstehen, dann kann ein Momentengleichgewicht im Lager der Umlenkrolle und ein Vergleichen der Terme bei der Entscheidung helfen.

2.11
Seilstatik

Annahmen	starres System	im Gleichgewicht

Hier werden zwei unterschiedliche Fälle der Seilstatik betrachtet: Entweder eine kontinuierliche Belastung wie bei einer Hängebrücke (quadratische Gleichung) oder konstantes Eigengewicht (hyperbolische Gleichung).

a) Annahmen und Herleitung



Ein Seil der Seilstatik besteht aus vielen kleinen Stäben, die über Gelenke miteinander verbunden sind. Lässt man die Anzahl von Stäben (und Gelenken) gegen unendlich und die Länge der Stäbe gegen Null gehen, dann erhalten wir das Modell vom ebenen Seil. Da Stäbe nur Kräfte in Stabrichtung übertragen können, ist die Seilkraft an jedem Punkt eine Kraft entlang des Seiles.

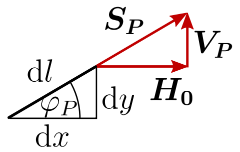
ANS Es gibt keine Querkräfte oder Biegemomente im Seil. Die Form der Seilkurve ist abhängig von den äußeren Belastungen. ***ANS***

Im Folgenden werden zwei Fälle näher betrachtet: Die konstante äußere Belastung $\boldsymbol{q_0}$ und das konstante Eigengewicht $\boldsymbol{p_0}$. In beiden Fällen ändert sich die Richtung der Belastung nicht. Beim Eigengewicht ist sie vertikal, bei der konstanten äußeren Belastung drehen wir das Koordinatensystem so, dass die Belastung im gedrehten System ebenfalls vertikal ist.

Dadurch ist die Horizontalkraft im ganzen Seil gleich. In allen hier betrachteten Seilen ändert sich nur die Vertikalkomponente mit $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{q(x)}$.

$$\boldsymbol{H_0} = \text{const} \tag{42.1}$$

ANS Am höchsten Punkt des Seiles sind Verikalkraft und Seilkraft maximal. ***ANS***



Gleichzeitig ergibt der Strahlensatz an einem kleinen Element des Seils $\boldsymbol{V_P} = \boldsymbol{H_0}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Beides zusammen führt auf die Differentialgleichung der Seilkurve (42.2). Mit der Überlegung $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos(\varphi_P)} = \sqrt{1+\tan(\varphi_P)^2}$ ergibt sich für die Seillänge Gleichung (42.3).

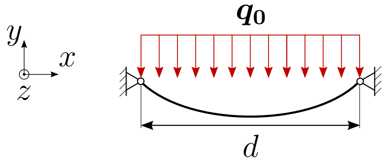
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{\boldsymbol{H_0}}\boldsymbol{q(x)} \tag{42.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \tag{42.3}$$

Beim Seil gilt auch der vektorielle Zusammenhang zwischen der gesamten Seilkraft $\boldsymbol{S_P}$ und den Komponenten $\boldsymbol{H_0}$ und $\boldsymbol{V_P}$.

$$\boldsymbol{S_P} = \sqrt{\boldsymbol{H_0}^2 + \boldsymbol{V_P}^2} = \frac{\boldsymbol{H_0}}{\cos(\varphi_P)} \tag{42.4}$$

a) Konstante äußere Belastung $q(x) = \text{const}$

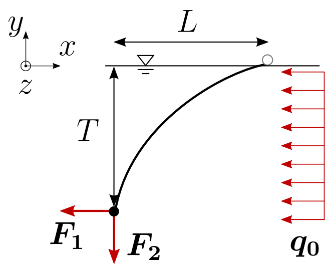


Eine konstante äußere Belastung $\boldsymbol{q(x)} = \boldsymbol{q_0}$ ist eine Streckenlast, die unabhängig vom Seil ist.[30] Das Seil selbst wird hier massefrei angenommen und die Streckenlast kann beispielsweise das Brückengewicht einer Hängebrücke oder der Widerstand gegen Bewegung in einem Fluid sein. Dabei ist das Koordinatensystem so zu wählen, dass die äußere Streckenlast senkrecht zur (neuen) Horizontalrichtung ist.

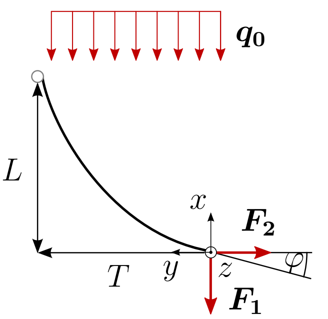
Anschließend ergibt sich aus der zweimaligen Integration von Gleichung (42.2) die Seilkurve $y(x)$ als Parabelfunktion. Die zwei unbekannten Konstanten C_1 und C_2 müssen über Randbedingungen bestimmt werden.

$$\boxed{y(x) = \frac{\boldsymbol{q_0} x^2}{2\boldsymbol{H_0}} + C_1 x + C_2} \tag{43.1}$$

Beispiel



Direkt über der Wasseroberfläche ist ein Seil an einem Rohr befestigt. Am anderen Ende des Seiles ist ein Stein auf dem neben der Seilkraft nur die Kräfte $\boldsymbol{F_1}$ und $\boldsymbol{F_2}$ wirken. Das Seil ist masselos und wird nur vom Wasser durch eine konstante äußere Last $\boldsymbol{q_0}$ belastet. Wenn zusätzlich L und T oder $\boldsymbol{F_1}$ und $\boldsymbol{F_2}$ bekannt sind, kann die Seilkurve (und damit die beiden anderen Größen) eindeutig bestimmt werden.



Zuerst wird das System so gedreht, dass die äußere Belastung in vertikale Richtung wirkt (z. B. wie links dargestellt). Die Seilkurve ist hier deshalb eine Funktion $x(y)$ statt $y(x)$. Das Koordinatensystem wird auf die Seilkurve gelegt, so dass C_2 aus Gleichung (43.1) Null wird.[31] Jetzt kann C_1 an Hand der zweiten Randbedingung bestimmt werden:

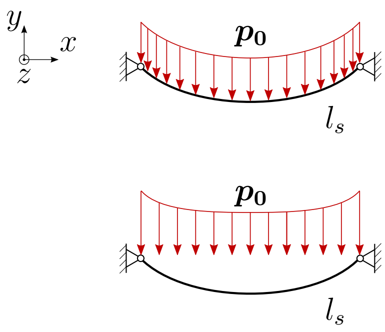
Mit gegebenen L und T kann man die Werte in die angepasste Gleichung (43.1) mit $x(y)$ einsetzen und nach C_1 umstellen ($C_1 = \frac{L}{T} - \frac{\boldsymbol{q_0} T}{2\boldsymbol{H_0}}$).
Sind die Kräfte gegeben (oder der Winkel φ dazwischen), ergibt sich für die Steigung $x'(0) = \tan(\varphi) = \frac{\boldsymbol{F_1}}{\boldsymbol{F_2}} = C_1$. Hier ist es wichtig, den richtigen Steigungswinkel zu nehmen. Beim Ausrechnen der Strecke T bei gegebenem L gibt es zwei Lösungen (quadratische Funktion). Hier ist die zur Aufgabe passende (physikalisch sinnvolle) Lösung zu wählen.

Beispiel

[30] Die Kraft, die in den Lagern des Seils aufgebracht werden muss, ist $\boldsymbol{q_0} d$.
[31] Auswertung an der Stelle Null ergibt dann $y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$.

Die Seillänge kann allgemein mit einer gegebenen/berechneten Seilkurve bestimmt werden. Setzt man die Ableitung der Seilkurve $y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ in die Gleichung für die Seillänge (42.3) ein und integriert diese, so erhält man die Seillänge l_s.

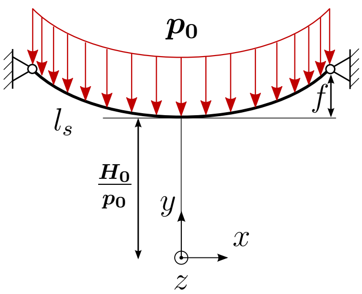
b) Konstantes Eigengewicht $\boldsymbol{q(s)} = \boldsymbol{p_0} = \mathbf{const}$



Anders als bei der konstanten äußeren Belastung ist das konstante Eigengewicht $\boldsymbol{q(s)}$ bzw. $\boldsymbol{p_0}$ eine eingeprägte Streckenlast, die direkt vom Seil und der Seillänge l_s abhängt. Trägt man die Belastung auf einer Horizontalen auf, so wächst sie mit zunehmender Steigung des Seils (sie ist eben nicht über der Horizontalen, sondern über gleichlange Seilelemente konstant). Für die gesamte Vertikalkraft, die in den Lagern aufgebracht werden muss, ergibt sich $\boldsymbol{p_0} l_s$.

Da die Belastung vom Seil abhängt, wird die Differentialgleichung (42.2) zu $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{\boldsymbol{H_0}} \boldsymbol{q(x)} = \frac{\boldsymbol{p_0}}{\boldsymbol{H_0}} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$. Zweimaliges Integrieren führt zu der als Kettenlinie bekannten Gleichung (44.1). C_1 und C_2 sind abhängig von der Position des Koordinatensystems und müssen über Randbedingungen bestimmt werden.

$$\boxed{y(x) = \frac{\boldsymbol{H_0}}{\boldsymbol{p_0}} \cosh\left(\frac{\boldsymbol{p_0}}{\boldsymbol{H_0}} x + C_1\right) + C_2 \qquad (44.1)}$$



Bei symmetrischer Aufhängung und geschickter Wahl des Koordinatensystems ($\frac{\boldsymbol{H_0}}{\boldsymbol{p_0}}$ unter dem tiefsten Punkt) sind beide Konstanten Null. f steht für den maximalen Durchhang.

$$\boxed{y_{\mathrm{KOS}}(x) = \frac{\boldsymbol{H_0}}{\boldsymbol{p_0}} \cosh\left(\frac{\boldsymbol{p_0}}{\boldsymbol{H_0}} x\right) \qquad (44.2)}$$

Aus den Verhältnissen der Seilkräfte in Gleichung (42.4) ergibt sich durch Umformen und mit Gleichung (44.2) ein Zusammenhang zwischen Seilkraft, Streckenlast und Durchhang. Die maximale Seilkraft im höchsten Punkt $y_{\max} = \frac{\boldsymbol{H_0}}{\boldsymbol{p_0}} + f$ kann mit Gleichung (44.3) zu $\boldsymbol{S}_{\max} = \boldsymbol{H_0} + f\boldsymbol{p_0}$ bestimmt werden.

$$\boxed{\boldsymbol{S(x)} = \boldsymbol{p_0} y(x) \qquad (44.3)}$$