Integralkoeffizienten

Dominik Zobel, April 2015
dominik.zobel@tu-harburg.de

1 Problemstellung

Ein digitales Gittermodell liegt vor und vor der Benutzung in einem Programm/Spiel sollen charakteristische physikalische Werte wie Volumen (Gewicht), Schwerpunktskoordinaten und Trägheitsmomente berechnet werden. Ein analytischer Lösungsweg soll bevorzugt werden, solange der Rechenaufwand nicht zu groß ist. Dabei stehen allein die Punktkoordinaten (*Vertices*) und deren Beziehung zueinander in Form von Teilflächen (*Faces*) für die Berechnung zur Verfügung.

2 Idee

Jede Teilfläche wird durch drei Punkte definiert, so dass das ganze Modell aus Dreiecken besteht. Da es schwierig ist, die Kennwerte direkt am Gesamtmodell zu berechnen, wird jedes einzelne Dreieck des Modells betrachtet. Zusammen mit dem Start- bzw. Betrachtungspunkt (Ursprung) bildet es einen Tetraeder. An jedem dieser Tetraeder werden nun alle alle wichtigen Kennzahlen bestimmt und aufsummiert. Dadurch ergeben sich die charakteristischen Werte des Gesamtmodells.

3 Allgemeines Vorgehen

Im Folgenden wird die allgemeine Lösung eines speziellen Integraltyps hergeleitet, der genau auf diese Problemstellung zugeschnitten ist und alle geforderten Werte zur Verfügung stellen kann:

$$\int\limits_{g_{1u}}^{g_{1o}} \int\limits_{g_{2u}(x)}^{g_{2o}(x)} \int\limits_{g_{3u}(x,y)}^{g_{3o}(x,y)} w(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

Das Integral kann zur Berechnung von Volumen, Schwerpunkten und Massenträgheiten quaderförmiger oder tetraederförmiger Körper[1] benutzt werden. Dazu werden die jeweiligen Integralgrenzen (konstante oder lineare Funktionen) sowie $w(x,y,z)$ folgendermaßen definiert:

$$\int\limits_{k}^{l} \int\limits_{mx+n}^{ox+p} \int\limits_{qx+ry+s}^{tx+uy+v} ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + exz + fxy + gx + hy + iz + j\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

Somit beschreiben tatsächlich die Koeffizienten a bis j die Funktion, deren Integral berechnet werden soll. Die Koeffizienten k bis v dienen zur Beschreibung der Integrationsgrenzen.

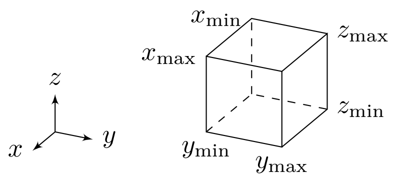
Beispielsweise wird mit $a = \ldots = i = 0$ und $j = 1$ das Volumen des Körpers berechnet, mit $a = b = 1$ und $c = \ldots = j = 0$ das Flächenträgheitsmoment um die z-Achse usw.

[1] In Abschnitt 4.2 finden sich die nötigen Überlegungen, um beliebig geformte Tetraeder untersucht werden können.

4 Bestimmung der Integrationsgrenzen

4.1 Spezialfall Quader

Für quaderförmige Körper, deren Flächennormalen in bzw. entgegen einer Koordinatenrichtung zeigen (d. h. der Körper ist nicht beliebig gedreht), können direkt die Randwerte zur als Integrationsgrenzen benutzt werden.



$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} w(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

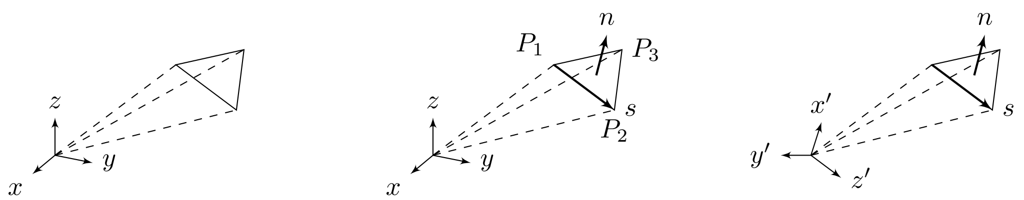
Dabei sind – wie in der Formel links angedeutet – nur die konstanten Anteile der Integrationsgrenzen ungleich Null ($k = x_{\min}, l = x_{\max}, m = 0, n = y_{\min}, o = 0, p = y_{\max}, q = 0, r = 0, s = z_{\min}, t = 0, u = 0, v = z_{\max}$).

4.2 Tetraeder

Im Folgenden soll aber hauptsächlich der Fall eines (nicht-regelmäßigen) Tetraeders untersucht werden. Dabei gibt es bei einer Dreifachintegration wie Gleichung (1) gewisse Restriktionen: Während die Integrationsgrenzen des innersten Integrals von den beiden anderen Koordinaten abhängen können, dürfen die des mittleren Integrals nur von den Koordinaten des äußeren Integrals abhängen. Die Integrationsgrenzen des äußeren Integrals müssen konstante Werte sein.

Das Problem ist nun, dass die vier Seiten eines beliebigen Tetraeders (die im Allgemeinen jeweils von allen drei Koordinaten abhängig sind) durch die angedeuteten Einschränkungen beim Dreifachintegral nicht ohne weitere Überlegungen abgebildet werden können.

Eine Lösung besteht darin, das Koordinatensystem geschickt zu drehen, so dass nur noch zwei der vier Seiten des Tetraeders von allen drei Koordinaten abhängen und eine andere durch einen konstanten Wert beschrieben werden kann. Diese Vorgehensweise wird im Folgenden betrachtet:



Gegeben ist ein Dreieck mit den drei Punkten P_1, P_2 und P_3, das zusammen mit dem Ursprung des Koordinatensystems ein Tetraeder ergibt. Die Normale n des Dreiecks ist

$$n = (P_2 - P_1) \times (P_3 - P_2).$$

Jeder Punkt des Dreiecks hat in diese Richtung den gleichen Abstand vom Ursprung (hier: x'-Richtung mit $x' \parallel n$). Somit entspricht x' der äußeren Integrationsvariable mit konstantem Wert als Integrationsgrenze.

Aufgrund der Anforderungen des Dreifachintegrals aus Gleichung (2) ist es sinnvoll, die zweite Richtung y' in Abhängigkeit der ersten Richtung (mit konstanten Grenzen) und der dritten Richtung (Abhängigkeit von den anderen beiden Integrationsvariablen) zu bestimmen.

Für die dritte Richtung (z'-Richtung) wird eine der Seiten des Dreiecks gewählt, die per Definition senkrecht zur Normalen des Dreiecks ist, also z. B.

$$z' \parallel s \qquad \text{mit} \qquad s = P_2 - P1.$$

Anschließend folgt für die y'-Richtung[2]

$$y' \parallel r \qquad \text{mit} \qquad r = s \times n.$$

Die Wahl einer Seite des Dreiecks als dritte Richtung führt dazu, dass diese Dreiecksseite senkrecht auf der zweiten Koordinatenrichtung steht. Somit kann eine Seite des Tetraeders im mittleren Integral als lineare Funktion beschrieben werden, die nicht mehr von der z'-Richtung (äußeres Integral) abhängt. Die andere Integrationsgrenze wird durch die Projektion des dritten Dreieckspunktes auf die $x'y'$- Ebene bestimmt.

Mit diesem gedrehten Koordinatensystem ist es also möglich, die Abhängigkeiten der Integrationsgrenzen so anzupassen, dass die gewünschten Werte für beliebige Tetraeder mit einem einzigen Dreifachintegral bestimmt werden können. Im Folgenden wird für die dazu nötige Drehung die Drehmatrix

$$R = \begin{bmatrix} \|n^T\| \\ \|r^T\| \\ \|s^T\| \end{bmatrix} \tag{3}$$

verwendet. Die Zeilen dieser Drehmatrix entsprechen den normierten Richtungsvektoren n, r und s.

5 Vergleichswerte

Wenn eine Ecke des Tetraeder der Ursprung ist (und die anderen drei P_1, P_2 und P_3), dann können Flächenschwerpunkt, Volumen und Volumenschwerpunkt des Körpers auch folgendermaßen bestimmt werden:

$$s_F = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} \tag{4}$$

$$V = \frac{\|s_F^T n\|}{6} \tag{5}$$

$$s_V = \frac{3}{4} s_F \tag{6}$$

Eine ähnlich vereinfachte Form für die Berechnung der Massenträgheitsmomente ist dem Autor bei Tetraedern nicht bekannt. Deshalb sollte für das oben aufgelistete Integral in Gleichung (2) eine allgemeine Lösung berechnet werden.[3]

[2] Die dargestellte Reihenfolge beim Kreuzprodukt ergbit sich aus der Bedingung, wieder ein Rechtssystem zu erhalten.

[3] Die Integrallösungen müssen natürlich mit den Ergebnissen für Schwerpunkt und Volumen aus den Gleichungen (4–6) übereinstimmen.

6 Analytische Lösung des Integrals

Im Folgenden werden die ersten Schritte aufgezeigt, um die allgemeine analytische Lösung des Integrals zu berechnen (mit drei beliebigen Integrationsvariablen x, y und z):

$$
\begin{aligned}
&\int_k^l \int_{mx+n}^{ox+p} \int_{qx+ry+s}^{tx+uy+v} ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + exz + fxy + gx + hy + iz + j \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow &\int_k^l \int_{mx+n}^{ox+p} \left[ax^2z + by^2z + \frac{1}{3}cz^3 + \frac{1}{2}dyz^2 + \frac{1}{2}exz^2 + fxyz + gxz + hyz + \frac{1}{2}iz^2 + jz\right]_{qx+ry+s}^{tx+uy+v} \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow &\int_k^l \int_{mx+n}^{ox+p} \big(ax^2 + by^2 + fxy + gx + hy + j\big)\,(x(t-q) + y(u-r) + (v-s)) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\,(dy + ex + i)\,\big((tx+uy+v)^2 - (qx+ry+s)^2\big) \\
&\qquad + \frac{1}{3}c\,\big((tx+uy+v)^3 - (qx+ry+s)^3\big)\,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow &\int_k^l \Bigg[x^3y\left(a(t-q) + \frac{1}{2}e(t^2-q^2) + \frac{1}{3}c(t^3-q^3)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}x^2y^2\left(a(u-r) + f(t-q) + c(t^2u - q^2r) + \frac{1}{2}d(t^2-q^2) + e(tu-qr)\right) \\
&\quad + \frac{1}{3}xy^3\left(b(t-q) + f(u-r) + c(tu^2 - qr^2) + d(tu-qr) + \frac{1}{2}e(t^2-q^2)\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}y^4\left(b(u-r) + \frac{1}{2}d(u^2-r^2) + \frac{1}{3}c(u^3-r^3)\right) \\
&\quad + x^2y\left(a(v-s) + g(t-q) + c(t^2v - q^2s) + e(tv-qs) + \frac{1}{2}i(t^2-q^2)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}xy^2\big(f(v-s) + g(u-r) + h(t-q) + d(tv-qs) + e(uv-rs) + i(tu-qr)\big) \\
&\quad + \frac{1}{3}y^3\left(b(v-s) + h(u-r) + c(u^2v - r^2s) + d(uv-rs) + \frac{1}{2}i(u^2-e^2)\right) \\
&\quad + xy\left(g(v-s) + j(t-q) + c(tv^2 - qs^2) + \frac{1}{2}e(v^2-s^2) + i(tv-qs)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}y^2\left(h(v-s) + j(u-r) + c(uv^2 - rs^2) + \frac{1}{2}d(v^2-s^2) + i(uv-rs)\right) \\
&\quad + y\left(j(v-s) + \frac{1}{2}i(v^2-s^2) + \frac{1}{3}c(v^3-s^3)\right)\Bigg]_{mx+n}^{ox+p} \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Die Darstellung wird noch etwas länger und spätestens wenn das letzte Integral bestimmt ist und die Integrationsgrenzen eingesetzt worden sind, muss eine sinnvolle Verkürzung der Terme gefunden werden, um die Anzahl an Rechenoperationen überschaubar zu halten.

Für die Gruppierung der Terme bietet es sich an, sie nach den Integrationskoeffizienten a bis j zu sortieren und das Ergebnis in der entsprechenden Variablen zu speichern (siehe nächster Abschnitt). Dadurch kann die Lösung jedes weiteren Integrals des gleichen Körpers durch eine einfache Multiplikation bestimmt werden.

7 Berechnung der Integralkoeffizienten

Zuerst werden die Hilfsvariablen A bis J definiert:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{l^5-k^5}{5}(o-m) + \frac{l^4-k^4}{4}(p-n)\\
B &= \frac{l^5-k^5}{10}(o^2-m^2) + \frac{l^4-k^4}{4}(op-mn) + \frac{l^3-k^3}{6}(p^2-n^2)\\
C &= \frac{l^5-k^5}{15}(o^3-m^3) + \frac{l^4-k^4}{4}(o^2p-m^2n) + \frac{l^3-k^3}{3}(op^2-mn^2) + \frac{l^2-k^2}{6}(p^3-n^3)\\
D &= \frac{l^5-k^5}{20}(o^4-m^4) + \frac{l^4-k^4}{4}(o^3p-m^3n) + \frac{l^3-k^3}{2}(o^2p^2-m^2n^2) + \frac{l^2-k^2}{2}(op^3-mn^3) + \frac{l-k}{4}(p^4-n^4)\\
E &= \frac{l^4-k^4}{4}(o-m) + \frac{l^3-k^3}{3}(p-n)\\
F &= \frac{l^4-k^4}{8}(o^2-m^2) + \frac{l^3-k^3}{3}(op-mn) + \frac{l^2-k^2}{4}(p^2-n^2)\\
G &= \frac{l^4-k^4}{12}(o^3-m^3) + \frac{l^3-k^3}{3}(o^2p-m^2n) + \frac{l^2-k^2}{2}(op^2-mn^2) + \frac{l-k}{3}(p^3-n^3)\\
H &= \frac{l^3-k^3}{3}(o-m) + \frac{l^2-k^2}{2}(p-n)\\
I &= \frac{l^3-k^3}{6}(o^2-m^2) + \frac{l^2-k^2}{2}(op-mn) + \frac{l-k}{2}(p^2-n^2)\\
J &= \frac{l^2-k^2}{2}(o-m) + (l-k)(p-n)
\end{aligned}$$

Mit diesen Zwischenlösungen können schließlich die Koeffizienten folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
a &= A(t-q) + B(u-r) + E(v-s)\\
b &= C(t-q) + D(u-r) + G(v-s)\\
c &= \frac{A}{3}(t^3-q^3) + B(t^2u-q^2r) + C(tu^2-qr^2) + \frac{D}{3}(u^3-r^3) + E(t^2v-q^2s) + G(u^2v-r^2s)\\
&\quad + H(tv^2-qs^2) + I(uv^2-rs^2) + \frac{J}{3}(v^3-s^3)\\
d &= \frac{B}{2}(t^2-q^2) + C(tu-qr) + \frac{D}{2}(u^2-r^2) + F(tv-qs) + G(uv-rs) + \frac{I}{2}(v^2-s^2)\\
e &= \frac{A}{2}(t^2-q^2) + B(tu-qr) + \frac{C}{2}(u^2-r^2) + E(tv-qs) + F(uv-rs) + \frac{H}{2}(v^2-s^2)\\
f &= B(t-q) + C(u-r) + F(v-s)\\
g &= E(t-q) + F(u-r) + H(v-s)\\
h &= F(t-q) + G(u-r) + I(v-s)\\
i &= \frac{E}{2}(t^2-q^2) + F(tu-qr) + \frac{G}{2}(u^2-r^2) + H(tv-qs) + I(uv-rs) + \frac{J}{2}(v^2-s^2)\\
j &= H(t-q) + I(u-r) + J(v-s)
\end{aligned}$$

Die Zugehörigkeit der Koeffizienten zu den Variablen aus Gleichung (2) ist hier noch einmal aufgezeigt:

Variable	x^2	y^2	z^2	yz	xz	xy	x	y	z	1
Integralkoeffizient	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Beispielsweise kann mit diesen Koeffizienten die Lösung eines Integrals $\int_k^l \int_{mx+n}^{ox+p} \int_{qx+ry+s}^{tx+uy+v} 5x^2+3x-2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ *durch die Multiplikation* $5 \cdot a + 3 \cdot g - 2 \cdot j$ *bestimmt werden.*

8 Ergebnis

Es sollten mehrere physikalische Werte (wie Schwerpunkte oder Trägheitsmomente) eines Gittermodells bestimmt werden. Zur Berechnung lagen alle Punktkoordinaten und die dadurch definierten Einzelflächen vor. Als erstes wurde das Gesamtmodell in einzelne Dreiecke unterteilt, die zusammen mit dem Start- bzw. Betrachtungspunkt (Ursprung) einen Tetraeder bilden.

Für einen beliebigen Tetraeder können alle gesuchten Werte bestimmt werden, sofern die Koordinaten (wie in Abschnitt 4.2 beschrieben) mit einer Drehmatrix wie R aus Gleichung (3) gedreht werden.

Anschließend werden die Integralkoeffizienten a bis j im gedrehten System analytisch bestimmt (wie in Abschnitt 7 angegeben) und mit den gedrehten Koordinaten multipliziert, um die Integrallösung zu erhalten.

Beispielsweise ergibt sich der Schwerpunkt in x-Richtung mit $x_s = R^T \frac{g}{j}$ *und in y-Richtung mit* $y_s = R^T \frac{h}{j}$*. Das Flächenträgheitsmoment um die y-Achse lautet* $I_{yz} = R^T \, b \, R$ *und das Flächendeviationsmoment der yz-Anteile* $I_{yz} = R^T (-1 \cdot d) \, R$*.*

Die gewünschten Werte können auch für jedes komplexere Modell berechnet werden, dessen Oberfläche aus Dreiecken besteht. Wichtig ist nur eine konsistente Definition der Dreiecke, um die Normalenrichtung richtig bestimmen zu können, was aber von allen Programmen automatisch erledigt werden sollte. Anschließend liefert die Summe über alle Teilelemente das Ergebnis des ganzen Modells.

Beispielfunktion in C++

```
void integralkoeffizienten( float& a, float& b, float& c, float& d, float& e,
                            float& f, float& g, float& h, float& i, float& j,
                            float k, float l,
                            float m, float n, float o, float p,
                            float q, float r, float s, float t, float u, float v ) {
   // Berechne die Koeffizienten eines Volumenintegrals der Form
   //
   //    g1  g2o(x)  g3o(x,y)
   //   Int Int     Int       w(x,y,z)  dz dy dx
   //   0   g2u(x)  g3u(x,y)
   //
   // mit w(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + exz + fxy + gx + hy + iz + j
   //     g1u      = k
   //     g1o      = l
   //     g2u(x)   = mx+n
   //     g2o(x)   = ox+p
   //     g3u(x,y) = qx+ry+s
   //     g3o(x,y) = tx+uy+v
   //
   // so dass das die Lösung des Integrals einer Multiplikation des Vektors
   // ( a, b, c, d, e, f, g, h, i, j ) mit den (dazugehörigen) Koeffizienten entspricht

   float kl5 = l*l*l*l*l - k*k*k*k*k;
   float kl4 = l*l*l*l   - k*k*k*k;
   float kl3 = l*l*l     - k*k*k;
   float kl2 = l*l       - k*k;

   // Berechne Hilfsvariablen
   float A = kl5/5 * ( o - m ) + kl4/4 * ( p - n );
   float B = kl5/10 * ( o*o - m*m ) + kl4/4 * ( o*p - m*n ) + kl3/6 * ( p*p - n*n );
   float C = kl5/15 * ( o*o*o - m*m*m ) + kl4/4 * ( o*o*p - m*m*n ) + kl3/3 * ( o*p*p - m*n*n )
           + kl2/6 * ( p*p*p - n*n*n );
   float D = kl5/20 * ( o*o*o*o - m*m*m*m ) + kl4/4 * ( o*o*o*p - m*m*m*n )
           + kl3/2 * ( o*o*p*p - m*m*n*n ) + kl2/2 * ( o*p*p*p - m*n*n*n )
           + (l-k)/4 * ( p*p*p*p - n*n*n*n );
   float E = kl4/4 * ( o - m ) + kl3/3 * ( p - n );
   float F = kl4/8 * ( o*o - m*m ) + kl3/3 * ( o*p - m*n ) + kl2/4 * ( p*p - n*n );
   float G = kl4/12 * ( o*o*o - m*m*m ) + kl3/3 * ( o*o*p - m*m*n ) + kl2/2 * ( o*p*p - m*n*n )
           + (l-k)/3 * ( p*p*p - n*n*n );
   float H = kl3/3 * ( o - m ) + kl2/2 * ( p - n );
   float I = kl3/6 * ( o*o - m*m ) + kl2/2 * ( o*p - m*n ) + (l-k)/2 * ( p*p - n*n );
   float J = kl2/2 * ( o - m ) + (l-k) * ( p - n );

   // Trage die entsprechenden Werte in die referenzierten Werte ein
   a = A * ( t - q ) + B * ( u - r ) + E * ( v - s );
   b = C * ( t - q ) + D * ( u - r ) + G * ( v - s );
   c = A/3 * ( t*t*t - q*q*q ) + B * ( t*t*u - q*q*r ) + C * ( t*u*u - q*r*r )
       + D/3 * ( u*u*u - r*r*r ) + E * ( t*t*v - q*q*s ) + G * ( u*u*v - r*r*s )
       + H * ( t*v*v - q*s*s ) + I * ( u*v*v - r*s*s ) + J/3 * ( v*v*v - s*s*s );
   d = B/2 * ( t*t - q*q ) + C * ( t*u - q*r ) + D/2 * ( u*u - r*r ) + F * ( t*v - q*s )
       + G * ( u*v - r*s ) + I/2 * ( v*v - s*s );
   e = A/2 * ( t*t - q*q ) + B * ( t*u - q*r ) + C/2 * ( u*u - r*r ) + E * ( t*v - q*s )
       + F * ( u*v - r*s ) + H/2 * ( v*v - s*s );
   f = B * ( t - q ) + C * ( u - r ) + F * ( v - s );
   g = E * ( t - q ) + F * ( u - r ) + H * ( v - s );
   h = F * ( t - q ) + G * ( u - r ) + I * ( v - s );
   i = E/2 * ( t*t - q*q ) + F * ( t*u - q*r ) + G/2 * ( u*u - r*r ) + H * ( t*v - q*s )
       + I * ( u*v - r*s ) + J/2 * ( v*v - s*s );
   j = H * ( t - q ) + I * ( u - r ) + J * ( v - s );
}
```